แยกเศษส่วนย่อย

ทฤษฎีที่ 10.7.7 เศษส่วนย่อย (Partial fractions)

การหาผลแปลงผกผันลาปลาซที่อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) ของ s จะเขียนได้ คือ

$$F(s) = \frac{P(S)}{Q(S)}$$

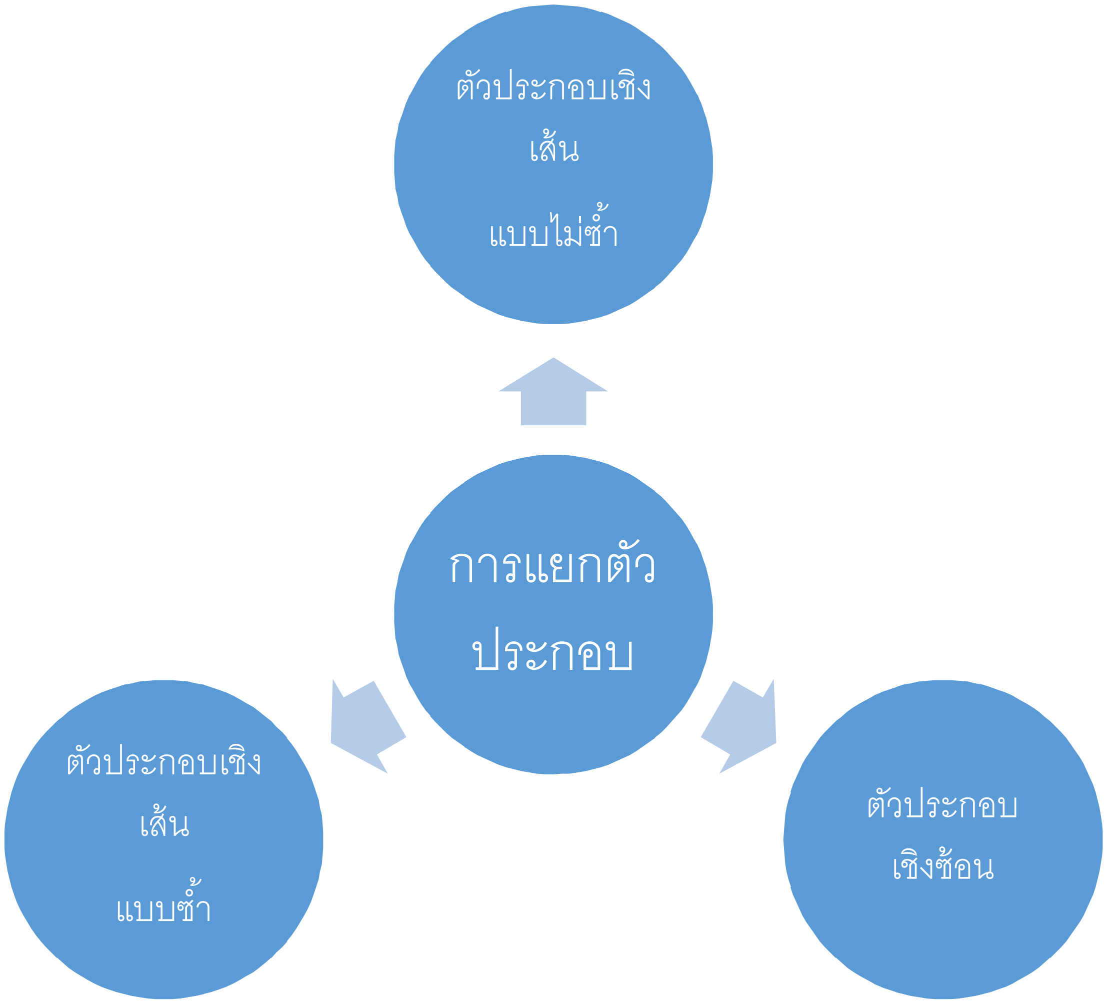
$$F_{(s)} = \frac{N_{(s)}}{D_{(s)}}$$

โดยที่ P(S) และ Q(S) เป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ของ S และ P(S) มีดีกรีน้อยกว่า Q(S) สามารถแยกตัวประกอบได้

ในรูปแบบ $\frac{A}{(as+b)^r}$ หรือ $\frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$ เมื่อ r = 1, 2, 3...

เราสามารถแยก F(s) เป็นเศษส่วนย่อยได้ ดังนี้

$$F_{(s)} = \frac{N_{(s)}}{D_{(s)}} = \frac{Numerator}{Denominator}$$


ตัวประกอบเชิงเส้น
แบบไม่ซ้ำ
การแยกตัวประกอบ
ตัวประกอบเชิงเส้น
แบบซ้ำ
ตัวประกอบเชิงซ้อน

ตัวประกอบเชิงเส้นแบบไม่ซ้ำ

$$\frac{P_{(s)}}{Q_{(s)}} = \frac{P_{(s)}}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)}$$

เช่น

$$s^2 + 6s + 8 = (s+2)(s+4)$$

$$2s^2 + 5s - 2 = (3s-1)(s+2)$$

$$s^2 + 2s + 3 = (s-1)(s+3)$$

จงกระจายเศษส่วนย่อย

$$F_{(s)} = \frac{2s - 6}{s^2 + 9s + 20}$$

ตัวประกอบเชิงเส้นแบบซ้ำกัน

$$\frac{P_{(s)}}{Q_{(s)}} = \frac{P_{(s)}}{(s-a)(s-b)^2} = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)^2} + \frac{C}{(s-b)}$$

เช่น

$$s^2 + 6s + 9 = (s+3)(s+3) = (s+3)^2$$

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = (s+3)(s+3)^2 = (s+3)^3$$

จงกระจายเศษส่วนย่อย

$$F_{(s)} = \frac{8s^2 - s + 2}{(s+1)(s+2)^3}$$

ตัวประกอบเชิงซ้อน

$$\frac{P_{(s)}}{Q_{(s)}} = \frac{P_{(s)}}{(s^2 + a_1 s + b_1)(s^2 + a_2 s + b_2)}$$

$$\frac{P_{(s)}}{Q_{(s)}} = \frac{As + B}{(s^2 + a_1 s + b_1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + a_2 s + b_2)}$$

ตัวอย่างที่ 10.44 จงแยกส่วนย่อยของ $\dfrac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3}$

วิธีทำ $$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{(2s+1)}$$

ตัวอย่างที่ 10.45 จงแยกเศษส่วนย่อยของ $\dfrac{3s^2-4s+2}{(s^2-2s+4)^2(s-5)}$

วิธีทำ $$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

ในหาค่าคงที่ A, B, C... จะสามารถหาได้โดยวิธีต่อไปนี้

1. โดยวิธีลิมิต (ใช้เฉพาะ Q(s) อยู่ในรูป $(as + b)^r$ จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟคเตอร์กำลังหนึ่ง ซึ่งไม่เป็นแฟกเตอร์ซ้ำ

2. โดยวิธีกำหนดค่า (s) จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่งซึ่งซ้ำ หรือเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่ง ปนกับแฟกเตอร์กำลังสอง

3. โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังสองทั้งหมดหรือ เป็นแฟคเตอร์กำลังหนึ่งทั้งหมด

$$\mathcal{L}^{-1} = \left[\frac{3s+10}{s^2+7s+12}\right]$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+10}{s^2+7s+12}\right]$

วิธีทำ

วิธีที่ 1

$N(s)$	:	Numerator (ตัวตั้ง)
$D(s)$	=	Denominator (ตัวหาร)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+10}{s^2+7s+12}\right]$$

เพราะว่า
$$\frac{3s+10}{s^2+7s+12} = \frac{3s+10}{(s+3)(s+4)}$$

$$\frac{3s+10}{s^2+7s+12} = \frac{A_1}{(s+3)} + \frac{A_2}{(s+4)} \qquad \text{..........} (1)$$

เอา $(s+3)(s+4)$ คูณสมการที่ (1) ทางซ้ายมือและขวามือ

$$3s+10 = A_1(s+4) + A_2(s+3)$$

$$3s+10 = A_1 s + 4A_1 + A_2 s + 3A_2$$

$$3s+10 = (A_1 + A_2)s + (4A_1 + 3A_2) \qquad \text{..........} (2)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ทางซ้ายมือกับขวามือของสมการที่ (2) จะได้

$$(A_1 + A_2)s = 3s$$

$$A_1 + A_2 = 3 \qquad \text{.......... (3)}$$

และ $\quad 4A_1 + 3A_2 = 10 \qquad$ .... (4)

เอา $3 \times (3)$; $\quad 3A_1 + 3A_2 = 9 \qquad$ .... (5)

เอา $(4) - (5)$; $\quad A_1 = 1$

แทน $A_1 = 1$ ใน (3)

$$1 + A_2 = 3$$

$$A_2 = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+10}{s^2+7s+12}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s+3}+\frac{A_2}{s+4}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}+\frac{2}{s+4}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]+2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]$$

$$= e^{-3t}+2e^{-4t}$$

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+10}{s^2+7s+12}\right] = \left(e^{-3t}+2e^{-4t}\right)u(t)$

ตอบ

วิธีที่ 2 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+10}{s^2+7s+12}\right]$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{3s+10}{s^2+7s+12}$$

$$= \frac{3s+10}{(s+3)(s+4)}$$

$$\frac{3s+10}{(s+3)(s+4)} = \frac{A_1}{(s+3)} + \frac{A_2}{(s+4)}$$

อาศัยสมการที่ (2.17) ;

$$A_m = F(s)(s-a_m)\Big|_{s=a_m}$$

$$A_1 = \frac{3s+10}{(s+3)(s+4)}(s+3)\Bigg|_{s=-3}$$

$$= \frac{3s+10}{s+4}\Bigg|_{s=-3}$$

$$A_1 = \frac{3(-3)+10}{-3+4} = \frac{-9+10}{1} = 1$$

$$A_2 = \frac{3s+10}{(s+3)(s+4)}(s+4)\Bigg|_{s=-4}$$

$$= \frac{3s+10}{s+3}\Bigg|_{s=-4}$$

$$= \frac{3(-4)+10}{-4+3} = \frac{-12+10}{-1} = 2$$

อาศัยสมการที่ (2.18); $$A_m = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=a_m}$$

$$N(s) = 3s + 10$$

$$D(s) = s^2 + 7s + 12$$

$$\frac{d}{ds}\left[D(s)\right] = D'(s) = 2s + 7$$

$$A_1 = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=-3}$$

ดังนั้น $$A_1 = \left.\frac{3s+10}{2s+7}\right|_{s=-3}$$

$$A_1 = \frac{3(-3)+10}{2(-3)+7} = \frac{-9+10}{-6+7} = 1$$

$$A_2 = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=-4}$$

$$= \left.\frac{3s+10}{2s+7}\right|_{s=-4}$$

$$= \frac{3(-4)+10}{2(-4)+7} = \frac{-12+10}{-8+7} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$\therefore$ จะได้ $A_1 = 1$ และ $A_2 = 2$

ซึ่งจะได้คำตอบเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+9}{s^2+4s+29}\right]$

วิธีทำ

วิธีที่ 1

$$F(s) = \frac{2s+9}{s^2+4s+29} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$F(s) = \frac{2s+9}{(s+2+j5)(s+2-j5)}$$

$$= \frac{A}{s+2+j5} + \frac{B}{s+2-j5}$$

$$\because \quad A_m = F(s)(s-a_m)\Big|_{s=a_m}$$

$$\therefore \quad A = \frac{2s+9}{(s+2+j5)(s+2-j5)} \cdot (s+2+j5)\Bigg|_{s=-2-j5}$$

$$A = \frac{2s+9}{s+2-j5}\Bigg|_{s=-2-j5}$$

$$A = \frac{2+j1}{2}$$

และ

$$B = \frac{2s+9}{(s+2+j5)(s+2-j5)} \cdot (s+2-j5)\bigg|_{s=-2+j5}$$

$$B = \frac{2s+9}{(s+2+j5)}\bigg|_{s=-2+j5}$$

$$B = \frac{2-j1}{2}$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+9}{s^2+4s+29}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+2+j5} + \frac{B}{s+2-j5}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{(2+j1)}{(s+2+j5)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{(s-j1)}{(s+2-j5)}\right]$$

$$= \left(\frac{2+j1}{2}\right)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+(2+j5)}\right] + \left(\frac{2-j1}{2}\right)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+(2-j5)}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathscr{L}[1] &= \frac{1}{s} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \\ \mathscr{L}\left[1e^{at}\right] &= \frac{1}{(s-a)} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = 1\cdot e^{at} \end{aligned}}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+9}{s^2+4s+29}\right] = \frac{1}{2}(2+j1)e^{-(2+j5)t} + \frac{1}{2}(2-j1)e^{-(2-j5)t}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2e^{-(2+j5)t} + je^{-(2+j5)t} + 2e^{-(2-j5)t} - je^{-(2-j5)t}\right]$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+9}{s^2+4s+29}\right] = \frac{1}{2}\left[2e^{-2t}e^{-j5t} + je^{-2t}e^{-j5t} + 2e^{-2t}e^{j5t} - je^{-2t}e^{j5t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\left[2e^{-j5t} + je^{-j5t} + 2e^{j5t} - je^{j5t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\left[2\left(e^{j5t} + e^{-j5t}\right) - j\left(e^{j5t} - e^{-j5t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\left[2\times 2\cos 5t - j\times 2j\sin 5t\right]$$

$$= e^{-2t}(2\cos 5t + \sin 5t)$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right] = e^{-2t}\left[2\cos 5t + \sin 5t\right]u(t)$$

ตอบ

วิธีที่ 2

$$F(s) = \frac{2s+9}{s^2+4s+29}$$

$$= \frac{2s+9}{(s+2)^2+5^2}$$

$$= \frac{2(s+2)+5}{(s+2)^2+5^2}$$

$$= \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+5^2} + \frac{5}{(s+2)^2+5^2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+5^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{(s+2)^2+5^2}\right]$$

$$\mathscr{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin at$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-bt}\sin at\right] = \frac{a}{(s+b)^2+a^2} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s+b)^2+a^2}\right] = e^{-bt}\sin at$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-bt}\cos at\right] = \frac{s+b}{(s+b)^2+a^2} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}\right] = e^{-bt}\cos at$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-2t}\cos 5t + e^{-2t}\sin 5t$$

ดังนั้น $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = e^{-2t}[2\cos 5t + \sin 5t]u(t)$ ตอบ

ตัวอย่างที่ 10.46 จงหาค่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s + 7}{S^2 - 2S - 3}\right\}$

วิธีทำ จากส่วน $s^2 - 2s - 3 = (s - 3)(s + 1)$ ดังนั้น

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{S^2 - 2S - 3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{(S - 3)(S + 1)}\right\}$$ แยกเศษส่วนย่อยได้

$$\frac{3S + 7}{(S - 3)(S + 1)} = \frac{A}{S - 3} + \frac{B}{S + 1}$$

วิธีที่ 1 หาค่า A, B โดยวิธีลิมิต จะได้

$$A = \lim_{S \to 3} \left\{ \frac{3S + 7}{(S + 1)} \right\} = \frac{16}{4} = 4$$

$$B = \lim_{S \to -1} \left\{ \frac{3S + 7}{(S - 3)} \right\} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{3S + 7}{(S^2 - 2S - 3)} \right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{4}{S - 3} \right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{S + 1} \right\}$$

$$= 4\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{S - 3} \right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{S + 1} \right\}$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

วิธีที่ 2 หาค่า A, B โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\frac{3S + 7}{(S - 3)(S + 1)} = \frac{A}{S - 3} + \frac{B}{S + 1}$$

นำ $(S - 3)(S + 1)$ คูณตลอด จะได้

$$3s + 7 = A(S + 1) + B(s - 3)$$

$$= AS + A + BS - 3B$$

$$= (A + B)S + (A - 3B)$$

$$3S = (A + B)S \quad \text{.......... 1}$$

$$7 = (A - 3B) \quad \text{.......... 2}$$

นำ 1 - 2 จะได้ $-4 = B - (-3B) = 4B$

ดังนั้น $B = \frac{-4}{4} = -1$

นำ $B = -1$ แทนใน 1 จะได้

$$3 = (A - 1)$$

ดังนั้น $A = 3 + 1 = 4$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{(S^2 - 2S - 3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{S - 3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S + 1}\right\}$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

หมายเหตุ จะเห็นว่าวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 5 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right]$

วิธีทำ

วิธีที่ 1

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3} \qquad \text{...........(1)}$$

นำ $(s+1)(s-2)(s-3)$ คูณสมการที่ (1) ทั้งซ้ายมือและขวามือ ดังนั้น

$$2s^2-4 = A(s-2)(s-3)+B(s+1)(s-3)+C(s+1)(s-2)$$

$$2s^2-4 = A\left(s^2-5s+6\right)+B\left(s^2-2s-3\right)+C\left(s^2-s-2\right)$$

$$2s^2-4 = As^2-5As+6A+Bs^2-2Bs-3B+Cs^2-Cs-2C$$

$$2s^2-4 = (A+B+C)s^2-(5A+2B+C)s+(6A-3B-2C)$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ทางซ้ายมือและขวามือจะได้

$$(A+B+C)s^2 = 2s^2$$

$$A+B+C = 2 \qquad \text{..........(2)}$$

$$-5A-2B-C = 0 \qquad \text{..........(3)}$$

$$6A-3B-2C = -4 \qquad \text{..........(4)}$$

(2) + (3); $$-4A-B = 2 \qquad \text{..........(5)}$$

2 × (3); $$-10A-4B-2C = 0 \qquad \text{..........(6)}$$

$(4) - (6);$ $$16A + B = -4 \qquad \text{.......... (7)}$$

$(5) + (7);$ $$12A = -2$$

$$A = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

แทน $A = -1/6$ ใน (5)

$$-4 \times -\frac{1}{6} - B = 2$$

$$\frac{2}{3} - B = 2$$

$$-B = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad B = -\frac{4}{3}$$

แทน $A = -1/6$ และ $B = -4/3$ ใน (2)

$$\frac{-1}{6} + \frac{-4}{3} + C = 2$$

$$\frac{-1-8}{6} + C = 2$$

$$\frac{-9}{6} + C = 2$$

$$\frac{-3}{2} + C = 2$$

$$C = 2 + \frac{3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{s-3}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/6}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4/3}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7/2}{s-3}\right]$$

$$= \frac{-1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$= \frac{-1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

ตอบ

วิธีที่ 2 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right]$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = F(s)$$

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

$$\boxed{A_m = F(s)(s-a_m)\Big|_{s=a_m}}$$

$$A = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \cdot (s+1)\Bigg|_{s=-1}$$

$$= \frac{2s^2 - 4}{(s-2)(s-3)}\Bigg|_{s=-1}$$

$$= \frac{2(-1)^2 - 4}{(-1-2)(-1-3)} = \frac{2 - 4}{(-3)(-4)} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$B = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \cdot (s-2)\Bigg|_{s=2}$$

$$B = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-3)}\Bigg|_{s=2}$$

$$= \frac{2 \times 2^2 - 4}{(2+1)(2-3)} = \frac{8 - 4}{(3)(-1)} = \frac{-4}{3}$$

$$C = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)} \cdot (s-3)\Bigg|_{s=3}$$

$$= \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)}\Bigg|_{s=3}$$

$$= \frac{2\times 3^2 - 4}{(3+1)(3-2)} = \frac{18 - 4}{(4)(1)} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

ซึ่งจะได้คำตอบเช่นเดียวกับวิธีที่ 1

ตัวอย่างที่ 10.47 จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5S^2 - 15S - 11}{(S+1)(S-2)^3}\right\}$

วิธีทำ จากโจทย์แยกเป็นเศษส่วนย่อย คือ

$$\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S+1)(S-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

หาค่า A, B โดยวิธีลิมิต ดังนั้น

$$A = \lim_{S\to -1}\left\{\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S-2)^3}\right\} = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{S\to 2}\left\{\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S+1)}\right\} = -\frac{21}{3} = -7$$

แทนค่า $A = -\dfrac{1}{3}$ และ $B = -7$ ลงในสมการเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S+1)(S-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{(-7)}{(S+2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

หาค่า C, D โดยวิธีกำหนดค่า s = 0 และ s = 1 ในสมการจะได้

แทน s = 0, $\frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{D}{2}$ 1

$$\frac{33 + 8 - 21}{24} = \frac{6C - 12D}{24}$$

$$20 = 6C - 12D$$

ดังนั้น $10 = 3C - 6D$ 2

แทน s = 1, $\frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - D$ 3

$$\frac{21}{2} = \frac{-1 + 42 + 6C - 6D}{6}$$

$$\frac{21}{2} = \frac{41 + 6C - 6D}{6}$$

$$\frac{63 - 41}{6} = \frac{6C - 6D}{6}$$

$$22 = 6C - 6D$$

หรือ $11 = 3C - 3D$ 4

นำ 2 - 4 จะได้

$$-1 = -3D$$

$$\therefore D = \frac{1}{3}$$

นำ $D = \frac{1}{3}$ แทนใน 4 จะได้

$$11 = 3C - (3)\frac{1}{3}$$

$$11 = 3C - 1$$

$$C = \frac{12}{3} = 4$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}$, $B = -7$, $C = \frac{1}{3}$ และ $D = 4$ จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S+1)(S-2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(S-2)^3} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1/3}{(s-2)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} + 4\,te^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

ตัวอย่างที่ 10.48 จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)}\right\}$

วิธีทำ จากโจทย์แยกเป็นเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)} = \frac{A}{(S + 2)} + \frac{BS + C}{(S^2 + 2)}$$

หาค่า A, B โดยวิธีกำหนดค่า

นำ $(s + 2)(s^2 + 2)$ คูณตลอดจะได้

$$7s^2 + 8s + 6 = A(S^2 + 2) + BS + C(S + 2)$$

กำหนดให้ $S = -2$ จะได้

$$18 = 6A \quad \therefore\ A = 3$$

กำหนดให้ $S = 0$

$$6 = 2A + 2C$$

$$6 = 6 + 2C \quad \therefore\ C = 0$$

กำหนดให้ $S = 1$

$$21 = 3A + 3B$$

$$= 9 + 3B$$

$$21 - 9 = 3B \quad \therefore\ B = 4$$

แทนค่า A, B, C ลงในสมการเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S+2)(S^2+2)} = \frac{3}{(S+2)} + \frac{4S}{(S^2+2)}$$

$$\therefore\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S+2)(S^2+2)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(S+2)} + \frac{4S}{(S^2+2)}\right\}$$

$$= 3e^{-2t} + 4\cos\sqrt{2}\,t$$