	สัปดาห์ที่ 1	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 1-3	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204

ชื่อหน่วยเรียน หน่วยเรียนที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

ชื่อบทเรียน

11 ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

12 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

13 จำนวนคอนจุเกต

14 พีชคณิตเชิงซ้อน

จุดประสงค์การสอน

11 เข้าใจถึงความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

111 บอกส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

112 บอกส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

12 เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

121 อธิบายจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

122 หาค่าของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน

13 เข้าใจการคอนจุเกตเชิงซ้อน

131 อธิบายการคอนจุเกตเชิงซ้อน

132 หาค่าจำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน

14 คำนวณจำนวนเชิงซ้อนด้วยพีชคณิตเชิงซ้อน

141 คำนวณหาผลบวกจำนวนเชิงซ้อน

142 คำนวณหาผลลบจำนวนเชิงซ้อน

143 คำนวณหาผลคูณจำนวนเชิงซ้อน

144 คำนวณหาผลหารจำนวนเชิงซ้อน

15 คำนวณจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

151 อธิบายจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

152 แปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดขั้ว

153 คำนวณหาโพราฟอร์ม ค่าหลัก และอากิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน

154 คำนวณโดยการคูณและหารโพลาร์ฟอร์ม.

เนื้อหาสาระ

11 เข้าใจถึงความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

111 บอกส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

112 บอกส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

1.1 ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับการพิจารณาจำนวนเชิงซ้อน เราสามารถพิจารณาได้ง่าย จากสมการกำลังสอง ดังตัวอย่างเช่น

$$z^2 + 9 = 10 \qquad ....(1.1)$$

$$z^2 - 10z + 41 = 10 \qquad ....(1.2)$$

ซึ่งสมการที่ (1.1)และ(1.2) จะเกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงซ้อน กล่าวคือ

จากสมการที่ (1.1) $z^2 + 9 = 10$

$$z^2 = -9$$

$$z^2 = \pm\sqrt{-9}$$

$$z^2 = \pm\sqrt{-1 \times 9}$$

$$z^2 = \pm\sqrt{-1}$$

เพราะฉะนั้น $z^2 = \pm 3.i$ ....(1.3)

และสมการที่ (1.2) $z^2 - 10z + 41 = 0$

$$z^2 - 10z + 25 + (41 - 25) = 0$$

$$(z-5)(z-5) + 16 = 0$$

$$(z-5)^2 + 16 = 0$$

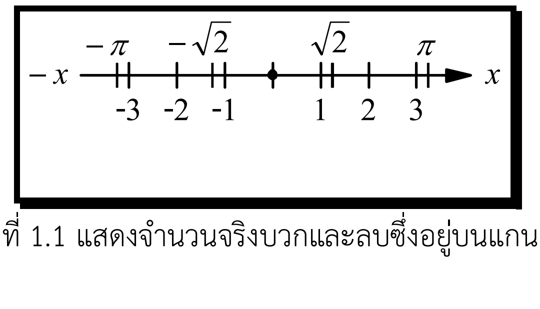
$$(z-5)^2 = -16$$

$$z - 5 = \pm\sqrt{-16}$$

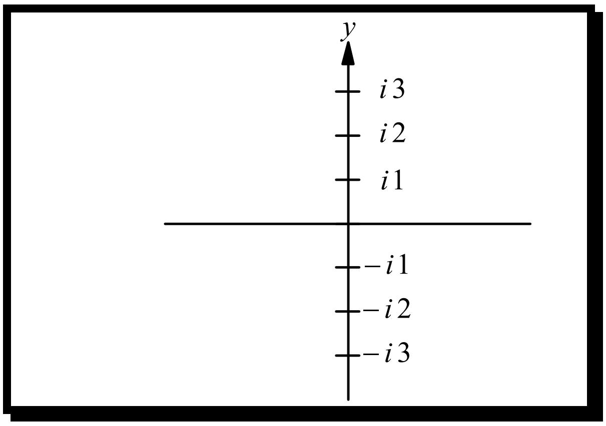
$$z - 5 = \pm\sqrt{-1 \times 16}$$

$$z - 5 = \pm 4\sqrt{-1} = \pm 4.i$$

เพราะฉะนั้น $z = 5 \pm 4.i$ ....(1.4)



รูปที่ 1.1 แสดงจำนวนจริงบวกและลบซึ่งอยู่บนแกน x



รูปที่ 1.2 แสดงจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอยู่บนแกน y

ซึ่ง $i=\sqrt{-1},\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i,\quad i^4=i^2\times i^2=(-1)\times(-1)=1,$
$i^5=i^4\times i=1\times i=i$ ฯลฯ

ฟังก์ชันขวามือของสมการที่(1.3) และ (1.4) เรียกว่า **จำนวนเชิงซ้อน (Complex number)** ซึ่งเขียนในรูปแบบทั่วไปได้คือ

$$z=a\pm bi \quad \text{หรือ} \quad z=a\pm ib \qquad ....(1.5)$$

ซึ่ง a เป็นจำนวนจริงที่อยู่บนแกน x และ b เป็นจำนวนจริงที่อยู่บนแกน y ดังนั้นจากสมการที่ (1.5) อาจเขียนได้ว่า

$$z=x\pm iy \qquad ....(1.6)$$

ซึ่ง เรียกว่า **ส่วนจริง (real part, Re z)** ของ z และ y เรียกว่า **ส่วนจิตภาพ (imaginary part, Imz)** ของ z และกำหนดได้ว่า

$$\mathrm{Re}z=x$$
$$\mathrm{Im}z=y$$

ตัวอย่างที่ 1.1 พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน ส่วนจริง และส่วนจินตภาพของ

(1) $z=4-3.i$ (2) $z=\pi.i$ (3) $z=2$

วิธีทำ

(1) $z=4-3.i$ (2) $z=\pi.i$ (3) $z=2$

$\mathrm{Re}z=4$ $\mathrm{Re}z=0$ $\mathrm{Re}z=2$

$\mathrm{Im}z=-3$ $\mathrm{Im}z=\pi$ $\mathrm{Im}z=0$

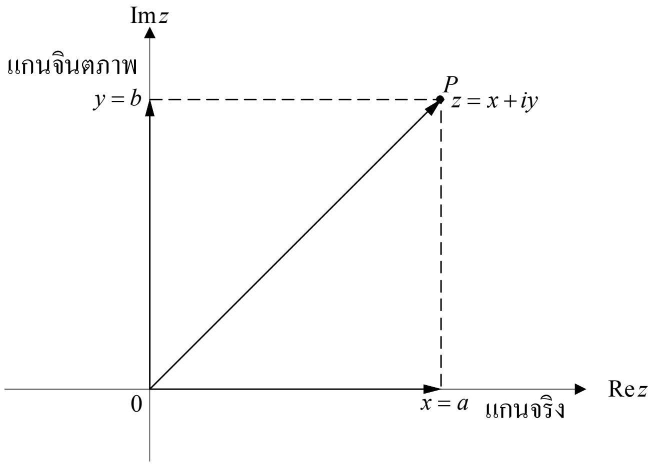
12 เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

121 อธิบายจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

122 หาค่าของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อน

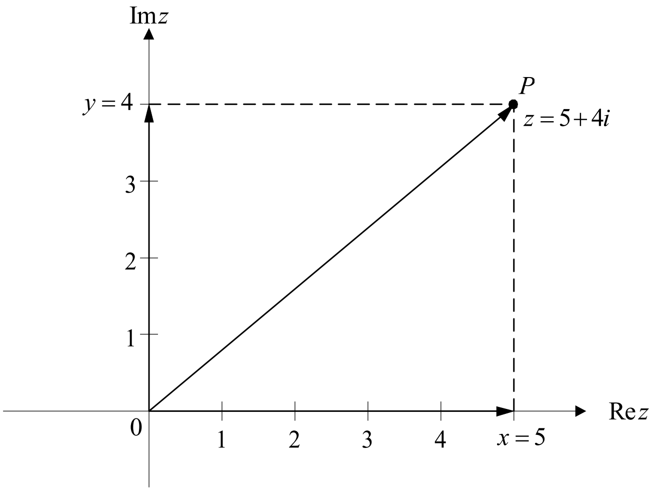
1.2 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

จากการพิจารณาสมการที่ (1.5) และ (1.6) ในตอนที่ 1.1 สามารถนำมากำหนดได้โดยเวกเตอร์ดังรูปที่ 1.3 ซึ่งรูปที่ 1.3 เรียกว่า **ระนาบเชิงซ้อน (Complex plane)** หรือ **ระนาบ z (z- plane)**



รูปที่ 1.3 ระนาบเชิงซ้อน

โดยที่ OP เป็นผลรวมของจำนวนจริงบนระนาบ x และ y หรือ OP = $z = x + iy$ ซึ่ง x เรียกว่า แกนจริง (real axis) และ y เรียกว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) ซึ่งจุด P(x ,y) จะเป็นไปตามค่าของ x และ y ดังนั้นจึงเรียกว่า จุดพิกัดร่วม P(x ,y) ว่าเป็นระบบ พิกัดฉาก(rectangular coordinate system หรือ Cartesian coordinate system) สมมุติว่า $z = 5 + 4.i$ ดังนั้นจุด P(x ,y) จะอยู่ในควอดแดรนท์ (quadrant)ที่ 1 ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 $z = 5 + 4.i$ บนระนาบเชิงซ้อน

13 เข้าใจการคอนจุเกตเชิงซ้อน

131 อธิบายการคอนจุเกตเชิงซ้อน

132 หาค่าจำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน

1.3 จำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z = x + iy$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ดังนั้น $x - iy$ จะเรียกว่าเป็นคอนจุเกต (conjugate) ของ z และเขียนแทนด้วย $\bar{z}$ หรือ z^* กล่าวคือ

ถ้า $z = x + iy$ ....(1.7)

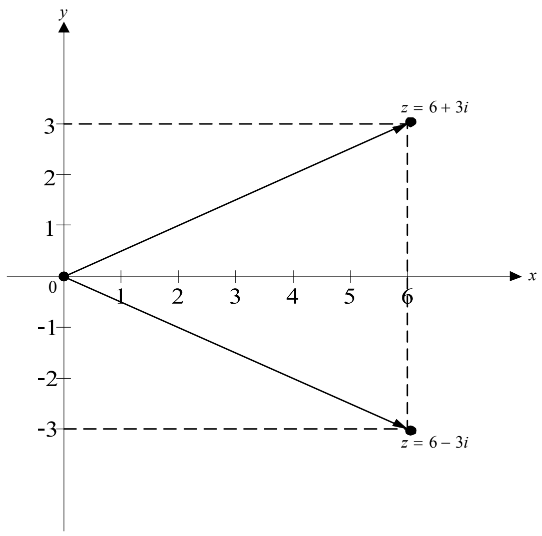
ดังนั้น $z^* = \bar{z} = x - iy$ ....(1.8)

ดังเช่น $z = x + iy = 6 + 3i$

ดังนั้น $\bar{z} = x - iy = 6 - 3i$

ซึ่ง z และ $\bar{z}$ สามารถแสดงอยู่บนระนาบเชิงซ้อนได้ ดังรูปที่ 1.5

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \\
z &= x - iy \\
\bar{z} &= x + iy \\
\bar{\bar{z}} &= x + iy \\
z\bar{z} &= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$



รูปที่ 1.5 จำนวนเชิงซ้อน และจำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน

จำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อนมีประโยชน์มากในการนำไปใช้พิจารณาการคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อน

14 คำนวณจำนวนเชิงซ้อนด้วยพีชคณิตเชิงซ้อน

141 คำนวณหาผลบวกจำนวนเชิงซ้อน

142 คำนวณหาผลลบจำนวนเชิงซ้อน

143 คำนวณหาผลคูณจำนวนเชิงซ้อน

144 คำนวณหาผลหารจำนวนเชิงซ้อน

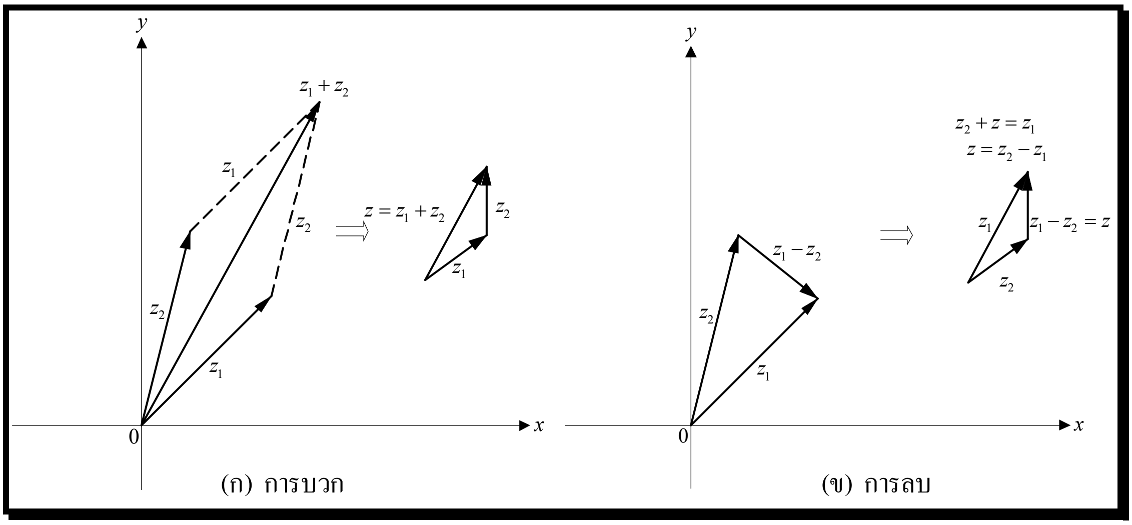
1.4 พีชคณิตเชิงซ้อน

พีชคณิตเชิงซ้อนที่จะกล่าวได้แก่ การบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเชิงซ้อน เมื่อพิจารณาให้

$z = x + iy$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$z = x - iy$ เป็นจำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน

ดังนั้นสำหรับการบวก ลบ คูณและหารจำนวนเชิงซ้อนพิจารณาดังนี้



รูปที่ 1.6 (ก) การบวกจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์

(ข) การลบจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์

1.4.1 การบวกจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z_1 = x_1 + iy_1 = 2 + 4\ i$

$z_2 = x_2 + iy_{21} = 4 + i$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \qquad ....(1.9)$$

เพราะฉะนั้น $z_1 + z_2 = (2 + 4i\ ) + (4\ \ + i\ ) = (4\ \ + 2\ \ ) + (4 + 1\ )i = 6 + 5i$

1.4.2 การลบจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 - z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) - \left(x_2 + iy_2\right) = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = \left(x_1 - x_2\right) + \left(y_1 - y_2\right)i \quad ...(1.10)$$

เพราะฉะนั้น $z_1 - z_2 = (2+4i) - (4+i) = (2-4) + (4-1)i = -2 + 3i$

ซึ่งการบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน สามารถเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ ดังรูปที่ 1.6 (ก) และ (ข)

1.4.3 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 z_2 = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + \left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right)i \quad ....(1.11)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2+4i)(4+i) \\ &= \left[(2)(4) - (4)(1)\right] + \left[(2)(1) + (4)(4)\right]i \\ &= (8-4) + (2+16)i = 4 + 18i \end{aligned}$$

1.4.4 การหารจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) + \left(x_2 y_1 - x_1 y_2\right)i}{x_2^2 + y_2^2} \quad ....(1.12)$$

ดังนั้น

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{4+i} = \frac{\left[(2)(4) + (4)(1)\right] + \left[(4)(4) - (2)(1)\right]\ i}{4^2 + 1^2}$$

$$= \frac{(8+4) + (16-2)\ i}{16+1} = \frac{12 + 14\ i}{17} = \frac{12}{17} + \frac{14}{17}\ i$$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาคำตอบต่อไปนี้

วิธีทำ

(1) $\left(2 - 3\ i\right)\left(4 + 2\ i\right) = 2\left(4 + 2\ i\right) - 3\ i\left(4 + 2\ i\right)$

$$\begin{aligned} &= 8 + 4i - 12i - 16i^2 \\ &= 8 + 4i - 12i - 6(-1);\ \ i^2 = 1 \\ &= 8 + 4i - 12i + 6 \\ &= 14 - 8i \end{aligned}$$

ตอบ

(2) $$\left[(2-i)\left(-3+2\ i\right)\right](5-4i)=\left[2(-3+2i)-i(-3+2i)\right](5-4i)$$
$$=(-6+4i+3i+2)(5-4i)$$
$$=(-4+7i)(5-4i)$$
$$=-4(5-4i)+7i\ (5-4i)$$
$$=-20+16i+35i+28$$
$$=8+51\ i$$

ตอบ

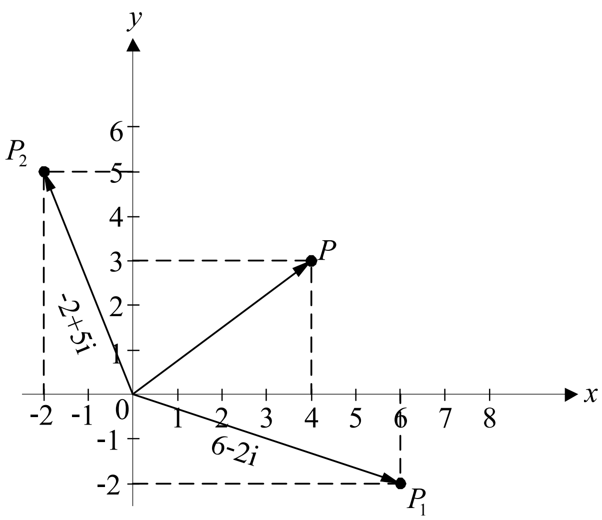
ตัวอย่างที่ 1.3 จงแสดง $\left(6-2\ i\right)-\left(2-5\ i\right)$ ด้วยเวกเตอร์

วิธีทำ $\because (6-2i)-(2-5i)=6-2i-2+5i=4+3i$

$\therefore P_1$ คือ $6-2\ i$

P_2 คือ $-2+5\ i$

P คือ $4+3\ i$



ตอบ

15 คำนวณจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

151 อธิบายจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

152 แปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดขั้ว

153 คำนวณหาโพราฟอร์ม ค่าหลัก และอากิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน

154 คำนวณโดยการคูณและหารโพลาร์ฟอร์ม

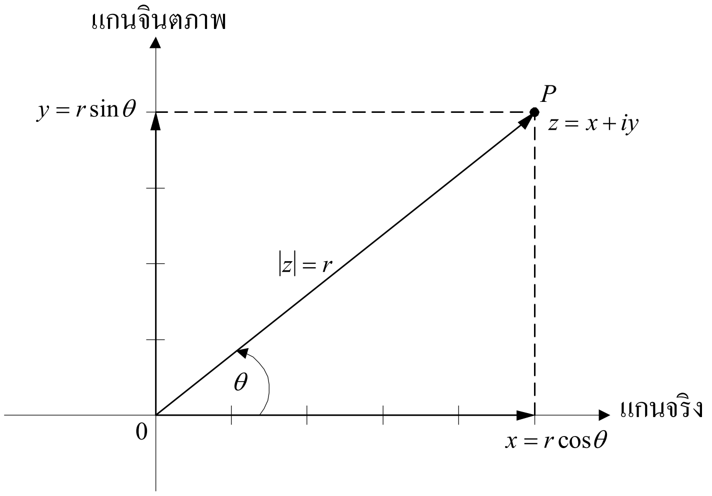
1.5 จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จำนวนเชิงซ้อนดังแสดงในหัวข้อ 1.2 จะอยู่ในระบบพิกัดฉาก และในทางปฏิบัติ เรามักจะพบในรูปแบบของ ระบบเชิงขั้ว (polar coordinate system) หรือเรียกว่า โพรลาร์ฟอร์ม (polar form) r , θ เสมอ ดังการพิจารณารูปที่ 1.7

จากรูปที่ 1.7 เราสามารถแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วได้ โดยแตกแกน r ให้อยู่ในแกน x และ y ได้ดังนี้

$$x = r\ \cos\theta \qquad \text{........(1.13)}$$

$$y = r\ \sin\theta \qquad \text{........(1.14)}$$



รูปที่ 1.7 แปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว

ดังนั้นจาก $z = x + iy$

จะได้โพลาร์ฟอร์มของ z คือ

$$z = r\ \cos\theta + i\ r\ \sin\theta = r\left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right) \qquad \text{........(1.15)}$$

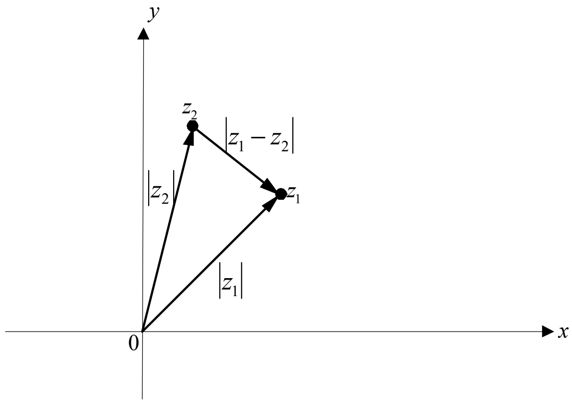
สมการที่ (1.15) ซึ่งอยู่ในรูปแบบตรีโกณ (trigonometric form) และสามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$z = r\angle\theta \qquad ......(1.16)$$

ซึ่ง r เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ หรือ มอดูลัส (absolute value หรือ modulus) ของ z และเขียนแทนด้วย $|z|$ กล่าวคือ

$$|z| = r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(z\bar{z}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ....(1.17)$$

ในทางเรขาคณิต $|z|$ หรือ r คือระยะทางระหว่างจุด z กับจุดกำเนิด 0 (รูปที่1.7) และเช่นเดียวกัน $|z_1 - z_2|$ คือระยะระหว่างจุด z_1 และ z_2 (ดังรูปที่1.6)



รูปที่ 1.8 ระยะระหว่างจุดสองจุด
บนระนาบเชิงซ้อน

θ เรียกว่า **อาร์กิวเมนต์ (argument)** ของ z และเขียนแทนด้วย **argz** ดังนั้นจากรูปที่ 1.7 จะได้

$$\theta = \arg z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ....(1.18)$$

ซึ่งมุม θ เป็นมุมที่เริ่มต้นจากแกน x ไปยังเส้นตรง OP (รูปที่ 1.7) โดยมุม θ จะมีทิศทางหมุนทวนเข็มนาฬิกา และมีหน่วยเป็นเรเดียน(radian) ค่าของ θ ที่อยู่ในช่วง $-\pi < \theta \leqq \pi$ จะเรียกคำนี้ว่า **ค่าหลัก (principal value)** ของอาร์กิวเมนต์ของ z และเขียนแทนด้วย Argz ดังนั้น

$$-\pi < Argz \leqq \pi$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาโพลาร์ฟอร์ม ค่าหลัก และอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = 1+i$

วิธีทำ จากโจทย์ $z = 1+i \,;\, x = y = 1$

$$|z| = |1+i| = r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1^2 + 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = (2)^{1/2}$$

$$\theta = Argz = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad \text{เรเดียน}$$

$$z = r\cos 45^\circ + ir\sin\theta$$
$$z = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\sin 40^\circ\right)$$

หรือ $z = \sqrt{2}\angle 45^\circ$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi; (n = 0,1,2,...)$$

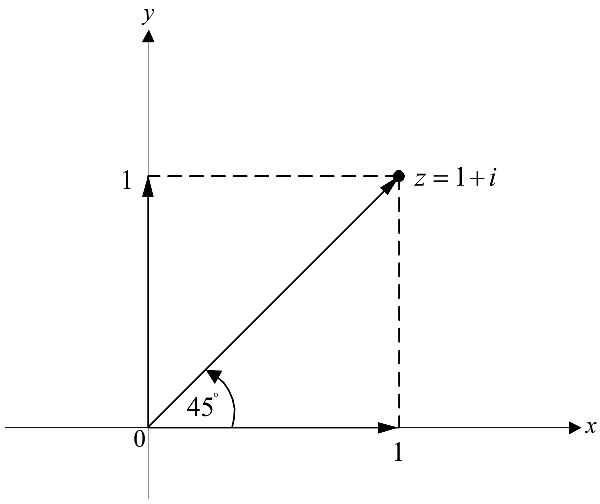
ที่ $n = 1;$ $\arg z = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi + 8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$

$$\arg z = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi - 8\pi}{4} = \frac{-7\pi}{4}$$

ซึ่งค่าหลัก (Argz) หรือที่ $n = 0$ แสดงดังรูปข้างล่างนี้ ดังนั้น โพลาร์ฟอร์มของ $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 40^\circ)$

ค่าหลักคือ $Argz = \theta = \frac{\pi}{4}$

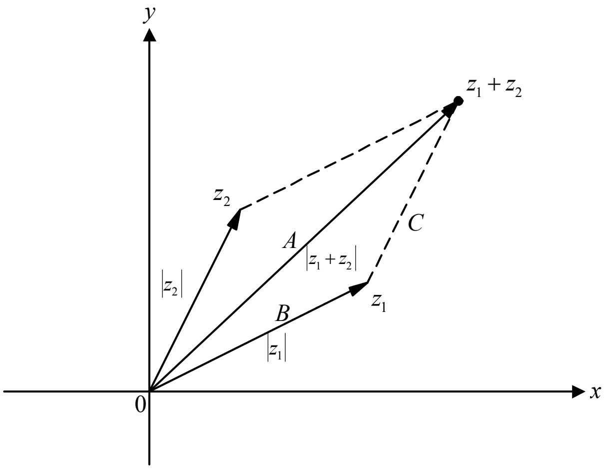
อาร์กิวเมนต์ของ z คือ $\arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$



ตอบ

หมายเหตุ $|z_1 + z_2| \quad \leq \quad |z_1| + |z_2|$ ....(1.19)

อสมการที่ (1.19) อาจจะแทนได้ด้วยรูปสามเหลี่ยม ดังในรูปที่ 1.7 ซึ่งเรียกว่า triangle inequality



รูปที่1.9 triangle inequality

$$y = 2x + 2 \qquad (a)$$
$$y > 2x + 2 \qquad (b)$$
$$y \geqq 2x + 2 \qquad (c)$$
$$y \leqq 2x + 2 \qquad (d)$$

(a) เรียกว่า สมการ (eqution)

(b),(c),(d) เรียกว่า อสมการ (inequality)

สามเหลี่ยมในรูปที่ 1.9 มีจุดยอดอยู่ที่ $0, z_1$ และ $z_1 + z_2$ ซึ่งมีด้านเท่ากับ $|z_1|, |z_2|$ และ $|z_1 + z_2|$ ซึ่งจะเห็นว่าด้าน A จะไม่ยาวกว่าด้าน B บวกกับด้าน C ดังนั้น

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$

และจะกำหนดได้ว่า

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| \qquad \text{.............(1.20)}$$

ซึ่งอสมการที่ (1.20) หมายความว่าผลบวกของค่าสัมบูรณ์จะไม่มากกว่าค่าสัมบูรณ์ของแต่ละเทอมรวมกัน

1.5.1.) การคูณ และการหารโพลาร์ฟอร์ม

1.) การคูณ

กำหนดให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $\qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{........(1.21)}$$

$$|z_1 z_2| = |r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]|$$

$$= \sqrt{(r_1 r_2)^2 [\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)]}; {}^{z = x + iy}_{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \sqrt{(r_1 r_2)^2 |1|}; \because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$= r_1 r_2$$

เพราะฉะนั้น $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$ $\qquad$ ....(1.22)

จากสมการที่ (1.21) ข้างบนนี้จะเห็นว่า การคูณกันของโพลาร์ฟอร์ม เราจะนำมุมมาบวกกัน $\left(\theta = \theta_1 + \theta_2\right)$ กล่าวคือ

$$\theta = Arg\left(z_1 z_2\right) = Argz_1 + Argz_1 \qquad ....(1.23)$$

2.) การหาร

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)}\right| = \left|\frac{r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1}{r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2}\right|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{r_1^2\cos^2\theta_1 + r_1^2\sin^2\theta_1}{r_2^2\cos^2\theta_2 + r_2^2\sin^2\theta_2}} = \sqrt{\frac{r_1^2\left(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1\right)}{r_2^2\left(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\right)}} = \sqrt{\frac{r_1^2}{r_2^2}} = \frac{r_1}{r_2} \text{ เพราะฉะนั้น}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|} \qquad ....(1.24)$$

และจะได้ว่า

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2 \qquad ....(1.25)$$

เพราะฉะนั้น $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right] \qquad ....(1.26)$

จากสมการที่ (1.26) จะเห็นว่าการหารกันของโพลาร์ฟอร์มของ z_1 และ z_2 เราจะนำเอามุมมาลบกัน

ตัวอย่างที่ 1.10 จงแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปโพลาร์ฟอร์ม

$$z = 2 + 2\sqrt{3i}$$

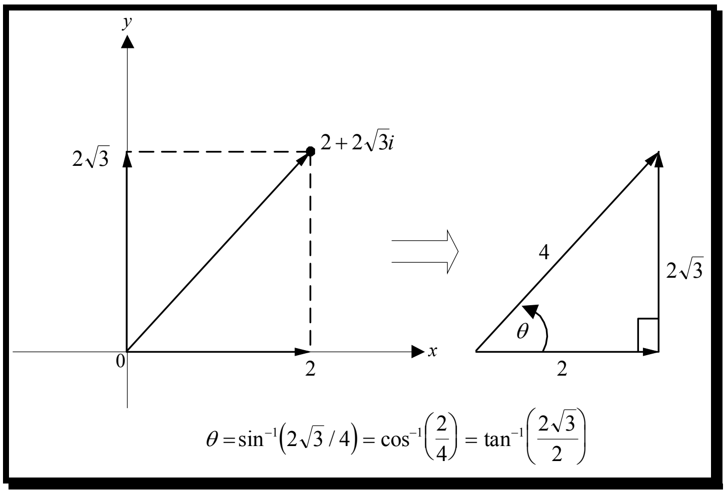
วิธีทำ

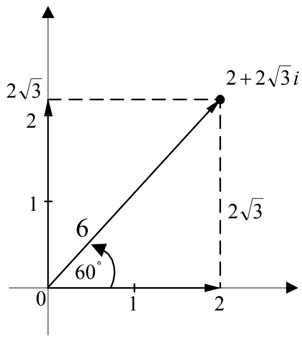
$$z = 2 + 2\sqrt{3i}$$

$$\because \quad z = 2 + 2\sqrt{3i}$$

$$r = |z| = \left|2 + 2\sqrt{3i}\right| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(2\sqrt{3}/2\right) = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \quad \text{เรเดียน}$$





รูปข้อ (a)

ดังนั้น

$$z = 2 + 1\sqrt{3i}$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos 60^{\circ} + i\sin 60^{\circ}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ตอบ

<table>
<tr><td>วิธีสอนและกิจกรรม</td><td colspan="2">1. บอกความสำคัญของหน่วยเรียน
2. ให้เนื้อหาโดยวิธี บรรยาย ยกตัวอย่างประกอบ
3. ถามคำถามในห้องเรียน</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>หนังสืออ้างอิง</td><td>หมายเลข 1</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>ใบเนื้อหา จำนวนเชิงซ้อน
■ ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน
■ จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก
■ จำนวนคอนจุเกตเชิงซ้อน
■ จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>Power point บทที่ 1 และ LCD Projector</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">1. สังเกตความสนใจในห้องเรียน
2. การตอบคำถามขณะเรียน
3. ตรวจผลงานจากแบบฝึกหัดที่มอบหมาย</td></tr>
</table>

แบบฝึกหัด

1. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(j2)(j5)$
   b. $(j2)(-j5)$
   c. $(-j2)(-j5)$
   d. $(j2)(j5)(-j2)$
   e. $(-j2)^2(-j5)^2$
2. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(15+j15)+(10+j10)$
   b. $(1+j2)+(2-j1)$
   c. $(8-j4)+(-2-j2)$
   d. $(1+j5)+j6$
   e. $(3+j4)-(2-j2)$
   f. $(2-j3)+(3+j4)$
3. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(5\angle 20^\circ).(6\angle 10^\circ)$
   b. $(7\angle -10^\circ).(8\angle 50^\circ)$
   c. $(12\angle -8^\circ).(20\angle -20^\circ)$
   d. $(15\angle 20^\circ)\div(5\angle 19^\circ)$
   e. $(39\angle 20^\circ)\div(6\angle -15^\circ)$
   f. $(50\angle 20^\circ)\div(100\angle 80^\circ)$
4. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(10\angle 35^\circ)+(8\angle 15^\circ)$
   b. $(25\angle 30^\circ)+(5\angle -15^\circ)$
   c. $(11\angle -48^\circ)+(22\angle -15^\circ)$
   d. $(35\angle 40^\circ)-(15\angle 10^\circ)$
   e. $(38\angle 37^\circ)-(20\angle -25^\circ)$
   f. $(90\angle 60^\circ)-(144\angle 90^\circ)$

5. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(15 - j20).(15 + j20)$
   b. $(-10 - j20).(15 - j30)$
   c. $(-j50).(10 + j50)$
   d. $(10 + j10).(15 - j15)$
6. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(j15).(j25)$
   b. $(j11).(-j12)$
   c. $(-j29).(-j32)$
   d. $(-j12).(-j45).(j35)$
   e. $(-j20)^2.(j30)^2$
   f. $(j10)^2.(-j9)^2.(-j18)^2$
7. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(16 - j11) + (26 + j26)$
   b. $(25 + j45) + (45 - j11)$
   c. $(21 - j36) + (-16 - j26)$
   d. $(31 + j81) + (-j101)$
   e. $(41 + j41) - (30 - j21)$
   f. $(21 + j26) + (21 - j26)$
8. **จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้**
   a. $(17\angle 20^\circ).(9\angle 15^\circ)$
   b. $(31\angle 66^\circ).(6\angle -21^\circ)$
   c. $(36\angle 26^\circ).(11\angle 146^\circ)$
   d. $(56\angle 31^\circ).(12\angle 9^\circ)$
   e. $(39\angle 36^\circ).(21\angle -26^\circ)$
   f. $(121\angle 31^\circ).(301\angle 61^\circ)$

9. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

a. $(19\angle 36^\circ)+(11\angle 13^\circ)$

b. $(36\angle 86^\circ)+(17\angle -51^\circ)$

c. $(21\angle 23^\circ)+(14\angle 15^\circ)$

d. $(46\angle 66^\circ)+(19\angle 19^\circ)$

e. $(51\angle 36^\circ)-(36\angle -26^\circ)$

f. $(61\angle 46^\circ)-(179\angle 91^\circ)$

10. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

a. $(20+j21).(26+j26)$

b. $(11+j31).(21-j11)$

c. $(6-j11).(-11-j21)$

d. $(11+j11).(-j16)$

e. $(51+j51).(41-j21)$

f. $(31+j41).(16-j21)$

11. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

a. $(5+j5)\div(11+j11)$

b. $(26+j26)\div(21-j11)$

c. $(16-j31)\div(-21-j41)$

d. $(16+j76)\div(-j16)$

e. $(41+j41)\div(21-j11)$

f. $(26+j61)\div(16-j19)$

12. จงเปลี่ยนปริมาณให้อยู่ในรูปของ Rectangular form

a. $100\angle -36^\circ$

b. $360\angle 86^\circ$

c. $210\angle 43^\circ$

d. $26\angle 76^\circ$

e. $81\angle -36^\circ$

f. $51\angle 46^\circ$

13. จงเปลี่ยนปริมาณให้อยู่ในรูปของ Polar form

a. $54 + j55$

b. $126 + j56$

c. $16 - j31$

d. $26 - j76$

e. $60 - j360$

f. $200 + j56$