	สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 4-6	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204

ชื่อหน่วยเรียน หน่วยเรียนที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

ชื่อบทเรียน

16 กำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน

17 การนำมาใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน

จุดประสงค์การสอน

16 เข้าใจเรื่องของ กำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน

161 อธิบายเรื่อง กำลังของจำนวนเชิงซ้อน

162 คำนวณหากำลังของจำนวนเชิงซ้อน

17 เข้าใจการนำมาใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน

171 คำนวณหาค่าในวงจรไฟฟ้าโดยใช้อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน

172 คำนวณหาค่าในวงจรไฟฟ้าโดยใช้เฟสเซอร์

เนื้อหาสาระ

16 เข้าใจกำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน

161 อธิบายกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

162 คำนวณหากำลังของจำนวนเชิงซ้อน

1.6 กำลัง และรากของจำนวนเชิงซ้อน

1.6.1. กำลัง (power)

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบโพลาร์ฟอร์มที่กล่าวมาข้างต้นคือ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{.....(1.27)}$$

ดังนั้น $z^2 = \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^2 = r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$$z^2 = r^2\left(\cos^2\theta + 2\cos\theta i\sin\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$z^2 = r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \qquad \text{.....(1.28)}$$

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

และจะได้

$$z^{-2} = r^{-2}\left[\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\right] \qquad \text{.....(1.29)}$$

เพราะฉะนั้น $z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$ .....(1.30)

ถ้า $|z| = r = 1$ จากสมการที่ (1.27) และ (1.30) จะได้

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad \text{.....(1.31)}$$

สมการที่ (1.31) เป็นสูตรของ De Moive

1.6.2. ราก (root)

ถ้ากำหนดให้ $z = w^n$ เมื่อ n เป็นรากที่ n ของ z ดังนั้น

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} \qquad \text{.....(1.32)}$$

ในรูปแบบโพลาร์ฟอร์มของ w คือ

$$w = R\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) \qquad \text{.....(1.33)}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (1.32) และ (1.33) คือ

$$w^n = z^{(1/n)^n} = \left[R\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)\right]^n$$

$$w^n = z = R^n\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)^n$$

จากสมการที่ (1.31) จะได้เทอมในวงเล็บขวามือข้างบนนี้ คือ

$$w^n = z = R^n\left(\cos n\phi + i\sin n\phi\right)^n$$

ดังนั้น

$$w^n = z = R^n\left(\cos n\phi + i\sin n\phi\right) = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ซึ่งจะได้ค่าสัมบูรณ์คือ

$$R^n = r \quad \text{ดังนั้น} \quad R^n = \sqrt[n]{r}$$

และอาร์กิวเมนท์ คือ

$$n\phi = \theta + 2K\pi \quad \text{ดังนั้น} \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n}$$

ซึ่ง K เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right]; k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad \text{.....(1.34)}$$

ซึ่ง n เป็นจำนวนรากของ z ที่คำนวณได้ ซึ่งอยู่บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์ และมีรัศมีเท่ากับ $\sqrt[n]{r}$ ซึ่งจะเป็นไปตามจุดยอด หรือจำนวนด้านของรูปหลายด้านที่อยู่ภายในวงกลมนี้ และค่าหลัก (principle value) ของ $w = \sqrt[n]{r}$ ซึ่งสามารถหาได้จากสมการที่(1.34)โดยกำหนดให้ K = 0

ตัวอย่างที่ 1.12 พิจารณา $w = \sqrt{z}$

วิธีทำ จากสมการที่ (1.34)

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right]$$

เพราะว่า n = 2, $w = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + K\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + K\pi\right)\right]$

ถ้า K = 0 ดังนั้นจะได้

$$w_0 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

ถ้า K = 1 ดังนั้นจากจะได้

$$w_1 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$$

$$w_1 = \sqrt{r}\left[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + A) &= -\cos A \\ \sin(\pi + A) &= -\sin A\end{aligned}$$

$$w_1 = -\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$\therefore \quad w_1 = -w_0$ **ตอบ**

17 เข้าใจการนำมาใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน

171 คำนวณหาค่าในวงจรไฟฟ้าโดยใช้อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน

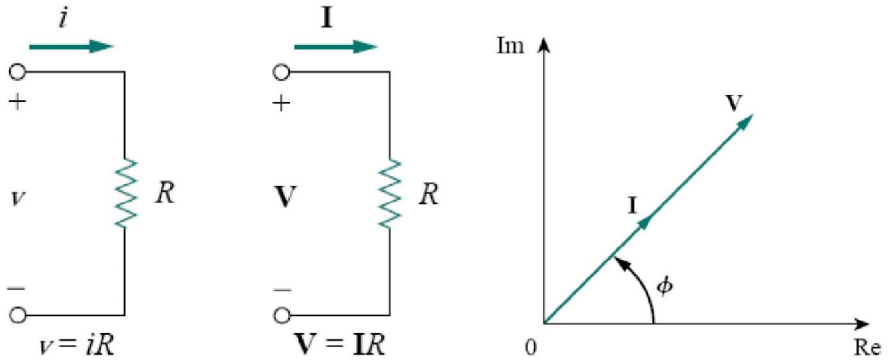
172 คำนวณหาค่าในวงจรไฟฟ้าโดยใช้เฟสเซอร์

1.7 การนำมาใช้งานของจำนวนเชิงซ้อน

1.7.1. อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน (complex impedance)

สำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอย่างง่ายนั้น โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว แรงดัน และกระแสจะพิจารณาเป็นรูปสัญญาณไซน์ ซึ่งเราทราบว่ารูปสัญญาณไซน์ หรือฟังก์ชันไซน์นี้ สามารถแทนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเชียลได้ ดังนั้นในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า มันจึงเกี่ยวข้องกับอิมพีแดนซ์เชิงซ้อน (complex impedance) เสมอ ดังตัวอย่างการพิจารณาวงจรอนุกรม RL และ RC ต่อไปนี้

<u>ผลที่เกิดขึ้นกับความต้านทาน (R)</u>



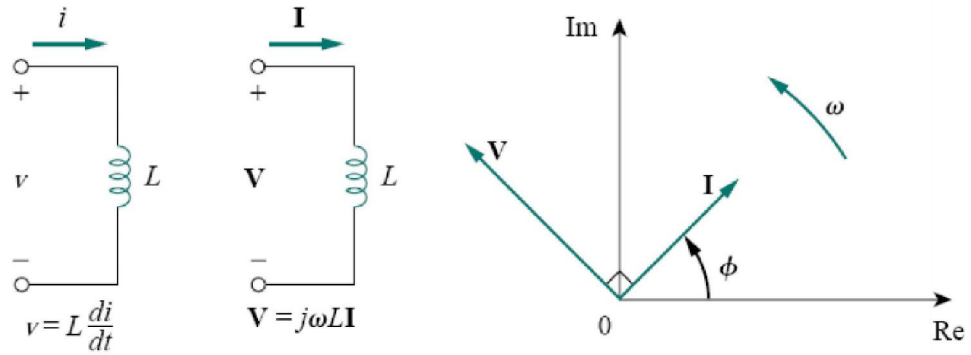
$$v = i.R = RI_m\cos(\omega t + \phi)$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}\, I_m\angle\phi$$

แต่ $I = I_m\angle\phi$ ดังนั้น

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}\, I$$

ผลที่เกิดขึ้นกับความตัวเหนี่ยวนำ (L)



$$v = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)$$

แต่ $-\sin A = \cos(A + 90°)$ เราสามารถเขียนสมการแรงดันใหม่ได้เป็น

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90°)$$

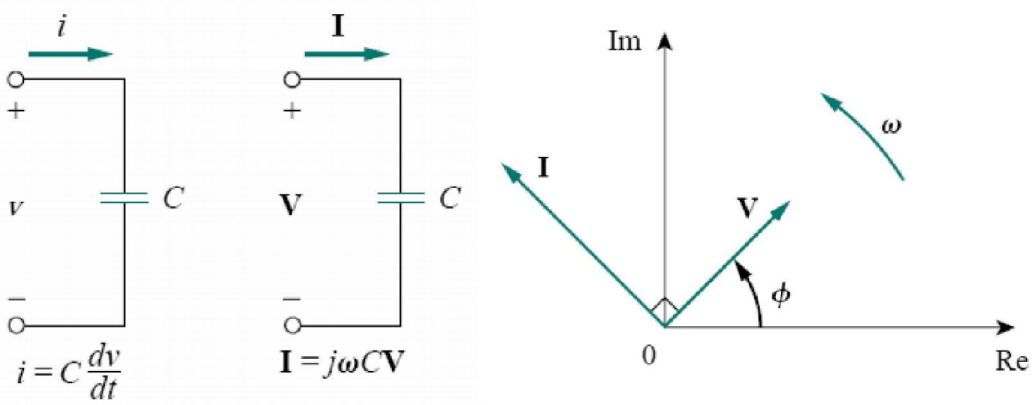
เมื่อเปลี่ยนรูปเป็นเฟสเซอร์

$$\mathrm{V} = \omega L I_m e^{j(\phi+90°)} = \omega L I_m e^{j\phi} e^{j90°} = \omega L I_m \angle\phi e^{j90°}$$

แต่ $I = I_m \angle\phi$ และ $e^{j90°} = j$ ดังนั้น

$$\mathrm{V} = j\omega L I$$

ผลที่เกิดขึ้นกับความตัวเก็บประจุ (C)



แรงดันตกคร่อม C มีค่าเป็น $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$ กระแสที่ไหลผ่าน C มีค่าเป็น

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

เช่นเดียวกับในกรณีของตัวเหนี่ยวนำ สามารถเปลี่ยนรูปแบบของสมการ สมการของกระแสที่ได้คือ

$$I = j\omega CV \Rightarrow V = \frac{I}{j\omega C}$$

Summary of voltage-current relationships.

Element	Time domain	Frequency domain
R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\frac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$

ตัวอย่าง แรงดันชั่วขณะมีค่า $v = 12\cos(60t + 45°)$ มีค่าตัวเหนี่ยวนำ 0.1H จงหาค่ากระแส steady-state ของตัวเหนี่ยวนำ

วิธีทำ

จาก $V = j\omega LI$, ที่ $\omega = 60$ rad/s และ $V = 12\angle 45°$

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{12\angle 45°}{j60 \times 0.1} = \frac{12\angle 45°}{6\angle 90°} = 2\angle -45°$$

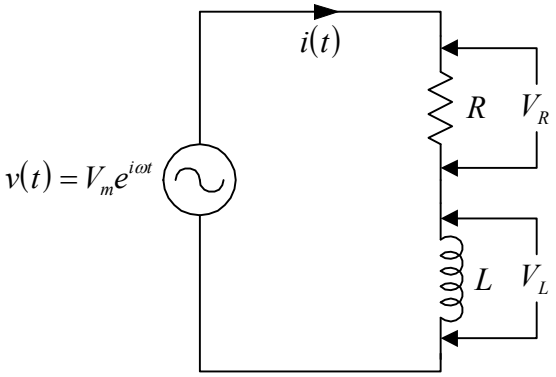
เขียนอยู่ในรูปแบบ time domain

$$i = 2\cos(60t - 45°)\ \text{A}$$

Impedances and admittances of passive elements.

Element	Impedance	Admittance
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$

พิจารณาวงจรอนุกรม RL เมื่อแหล่งจ่าย $v(t) = V_m e^{i\omega t}$ ดังรูปที่ 1.10 ซึ่งทั้งนี้ จากสูตรของ Euler สามารถแทนฟังก์ชัน $V_m e^{i\omega t}$ ให้อยู่ในรูปผลรวมของไซน์ และโคไซน์ได้ คือ $V_m e^{i\omega t} = v_m(\sin\omega t + i\cos\omega t)$ และจากกฎแรงดันของ Kirchoff ในรูปที่ 1.10 คือ



รูปที่ 1.10 วงจรอนุกรม RL

$$V_R + V_L = v(t)$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = V_m e^{i\omega t}$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_m e^{i\omega t} \qquad \text{.....(1.35)}$$

สมการที่ (1.35) คือ สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 1 ซึ่งสามารถแก้สมการเพื่อคำนวณหากระแส $I(t)$ ได้ดังนี้

รูปแบบทั่ว ๆ ไปของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 1 คือ

$$y' + f(x)y = r(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x) \qquad \text{.....(1.36)}$$

ซึ่งคำตอบของสมการ (1.36) คือ

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r(x)dx + C\right] \qquad \text{...(1.37)}$$

เมื่อ $h = \int f(x)dx$ ...(1.38)

จากสมการที่ (1.35) ทำให้เหมือนกับสมการ (1.36) โดยนำเอา L หารตลอด ดังนั้น

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{Ri(t)}{L} = \frac{V_m}{L}e^{i\omega t} \qquad \text{.....(1.39)}$$

คำตอบของสมการที่ (1.39) จะหาได้จากสมการ (1.37) คือ

$$i(t) = e^{-h}\left[\int e^{h}\frac{V_m}{L}e^{i\omega t}dt + C\right]; r(x) = r(t) = \frac{V_m}{L}e^{i\omega t} \qquad \text{.....(1.40)}$$

ซึ่ง h จากสามการ (1.38) จะได้

$$h = \int \frac{R}{L}dt; f(x) = f(t) = \frac{R}{L}$$

$$h = \frac{R}{L}\int dt; = \frac{R}{L}t$$

$$h = \frac{R}{L}t \qquad \text{.....(1.41)}$$

นำสมการที่ (1.41) แทนในสมการที่ (1.40) ดังนั้น

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}e^{i\omega t}dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{L}\int e^{\left(\frac{R}{L}+i\omega\right)t}dt + C\right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{L}\left(\frac{L}{R+i\omega L}\right)\int e^{\left(\frac{R+i\omega L}{L}\right)t}d\left(\frac{R+i\omega L}{L}\right)t + C\right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{R+i\omega L}e^{\left(\frac{R+i\omega L}{L}\right)^{t}} + C\right]; \int e^{v}dv = e^{v} + C$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{R+i\omega L}e^{\frac{R}{L}t}e^{i\omega t} + C\right]; e^{x+y} = e^{x}e^{y}$$

$$= \frac{V_m}{R+i\omega L} e^{-\frac{R}{L}t} e^{\frac{R}{L}t} e^{i\omega t} + e^{-\frac{R}{L}t} C$$

$$= \frac{V_m}{R+i\omega L} e^{i\omega t} + e^{-\frac{R}{L}t} C \; ; \; e^{-x}e^{x} = e^{-x+x} = e^{0} = 1$$

เพราะฉะนั้น $$i(t) = \frac{V_m}{R+i\omega L} e^{i\omega t} + Ce^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{.....(1.42)}$$

สำหรับการพิจารณาอิมพิแดนซ์เชิงซ้อน เราจะคำนึงถึงเฉพาะสภาวะคงที่ (steady state) ดังนั้นจากสมการที่ (1.42) จะได้

$$i(t) = \frac{V_m e^{i\omega t}}{R+i\omega L} \qquad \text{.....(1.43)}$$

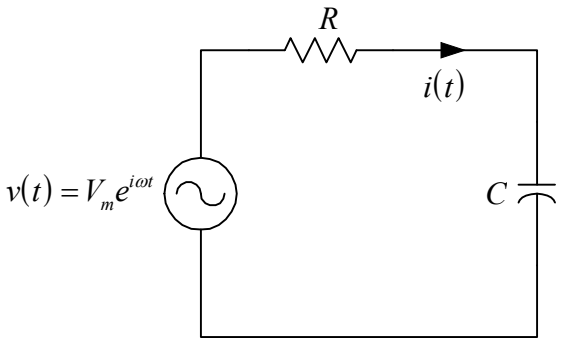
เพราะฉะนั้นอิมพีแดนซ์เชิงซ้อน คือ

$$Z = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V_m e^{i\omega t}}{\frac{V_m e^{i\omega t}}{R+i\omega L}} = \frac{1}{\frac{1}{R+i\omega L}} = R+i\omega L$$

$$Z = R+i\omega L \qquad \text{.....(1.44)}$$

สมการที่ (1.44) เป็นอิมพีแดนซ์เชิงซ้อนของวงจรอนุกรม RL

พิจารณาวงจรอนุกรม RC ในรูปที่ 1.11 ซึ่งแหล่งจ่ายเหมือนกันกับรูปที่ 1.10 ดังนั้นจะได้



รูปที่ 1.11 วงจรอนุกรม RC

$$V_R + V_C = v(t)$$

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = V_m e^{i\omega t} \qquad \text{.....(1.46)}$$

$$\begin{aligned} q &= CV_c \\ V_c &= \frac{1}{C}q \\ q &= \int i(t)dt \\ \therefore V_c &= \frac{1}{C}\int i(t)dt \end{aligned}$$

ทำการดิฟสมการที่ (1.45);

$$\frac{d}{dt}\left[Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \right] = \frac{d}{dt}\left[V_m e^{i\omega t}\right]$$

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}\int i(t)dt = V_m \frac{d}{dt}e^{i\omega t}$$

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = V_m e^{i\omega t}\frac{d(i\omega t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{i\omega V_m e^{i\omega t}}{R} \qquad \text{.....(1.46)}$$

สมการที่ (1.46) จะคล้ายกับสมการที่ (1.39) ดังนั้นจากสมการ (1.37) และ (1.38) จะได้

$$i(t) = \left[e^{-h}\int e^{h}\frac{i\omega V_m e^{i\omega t}}{R}dt + C \right] \qquad \text{.....(1.47)}$$

ซึ่ง $$h = \int \frac{1}{RC}dt = \frac{t}{RC} \qquad \text{.....(1.48)}$$

นำเอาสมการที่ (1.46) ไปแทนในสมการที่ (1.47) ดังนั้น

$$i(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{i\omega V_m}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}e^{i\omega t}dt + C \right]$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{i\omega V_m}{R}\int e^{\left(\frac{t}{RC}+i\omega\right)t}dt + C \right]$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{i\omega V_m}{R}\frac{RC}{1+i\omega RC}\int e^{\left(\frac{t+i\omega RC}{RC}\right)t}d\frac{1+i\omega RC}{RC}t + C \right]$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{i\omega V_m C}{1+i\omega RC}e^{\left(\frac{t+i\omega RC}{RC}\right)} + C \right]$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{i\omega V_m C}{1+i\omega RC}e^{\frac{t}{RC}}e^{i\omega t} + C \right]$$

$$i(t) = \frac{i\omega V_m C e^{i\omega t}}{1+i\omega RC} + Ce^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{.....(1.49)}$$

สำหรับสภาวะคงที่ จากสมการที่ (1.49) จะได้

$$i(t) = \frac{i\omega V_m C e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC}$$

$$= \frac{\dfrac{i\omega V_m C e^{i\omega t}}{i\omega C}}{\dfrac{1 + i\omega RC}{i\omega C}}$$

$$= \frac{V_m e^{i\omega t}}{\dfrac{1}{i\omega C} + R}$$

$$= \frac{V_m e^{i\omega t}}{R + \dfrac{1}{i\omega C}\left(\dfrac{i}{i}\right)}$$

$$= \frac{V_m e^{i\omega t}}{R + \dfrac{i}{i^2\omega C}}$$

$$= \frac{V_m e^{i\omega t}}{R + \dfrac{i}{\omega C}}; i^2 = -1$$

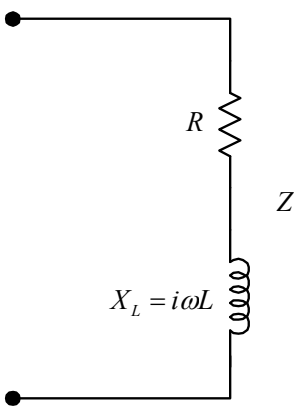
เพราะฉะนั้นอิมพีแดนซ์เชิงซ้อน คือ

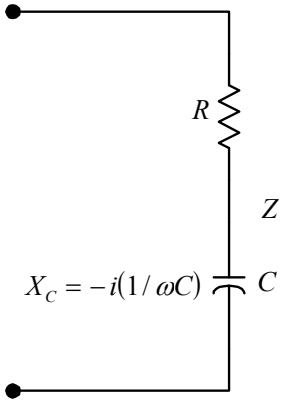
$$Z = \frac{V(t)}{i(t)} = \frac{V_m e^{i\omega t}}{\dfrac{V_m e^{i\omega t}}{R - \dfrac{i}{\omega C}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R - \dfrac{i}{\omega C}}}$$

$$Z = R - \frac{i}{\omega C} = R - i(1/\omega C) \qquad \text{.....(1.50)}$$

สมการที่ (1.50) เป็นอิมพีแดนซ์เชิงซ้อนของวงจรอนุกรม RC

จากสมการที่ (1.44) และ (1.50) สามารถนำมากำหนดอิมพีแดนซ์เชิงซ้อนได้ดังรูปที่ 1.12





$inductive\ reactance: X_L = i\omega L\ \Omega$

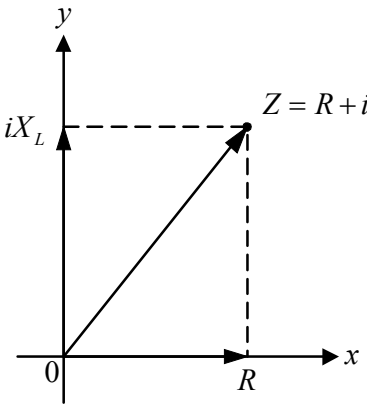
(ก) อิมพีแดนซ์เชิงซ้อนของวงจรอนุกรม RL

$capacitive\ reactance: X_C = -i(1/\omega C)\ \Omega$

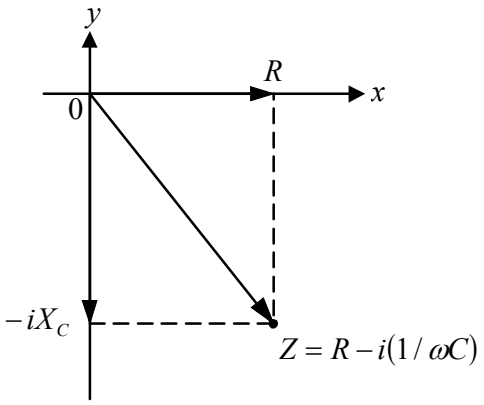
(ข) อิมพีแดนซ์เชิงซ้อนของวงจรอนุกรม RC

รูปที่ 1.12 อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน

และเนื่องจากอิมพีแดนซ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นเราสามารถที่จะแทนอิมพีแดนซ์ให้อยู่ในระนาบเชิงซ้อน (แสดงอิมพีแดนซ์ได้ด้วยเวกเตอร์) ได้ดังรูปที่ 1.13



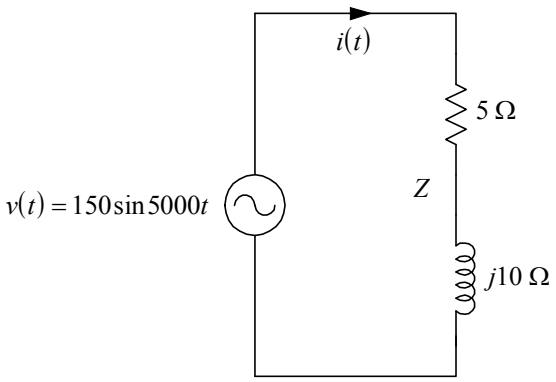
(ก) วงจรอนุกรม RL



(ข) วงจรอนุกรม RC

รูปที่ 1.13 อิมพีแดนซ์เชิงซ้อนในระนาบเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 1.13 วงจรอนุกรม RL มี $R = 5\Omega, L = 2\ mH$ และแหล่งจ่าย $v(t) = 150\ \sin(5000t)$ โวลท์ จงคำนวณหาอิมพีแดนซ์เชิงซ้อน Z



รูปวงจรอนุกรม RL

วิธีทำ จากโจทย์ $v(t) = 150\ \sin(5000t)$

และ $v(t) = V_m \sin(\omega t)$

ดังนั้นจาก จะได้;

$\omega = 5000$ เรเดียน/วินาที

$\because \quad X_L = \omega L$

$= 5000(2 \times 10^{-3}) = 10\ \Omega$

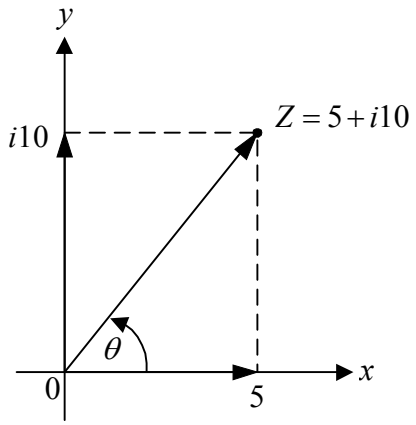
ดังนั้น $Z = R + X_L$

$\therefore \quad Z = 5 + i10\Omega \Rightarrow rec\tan gular\ form$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{10}{5}\right) = 63.4^\circ$

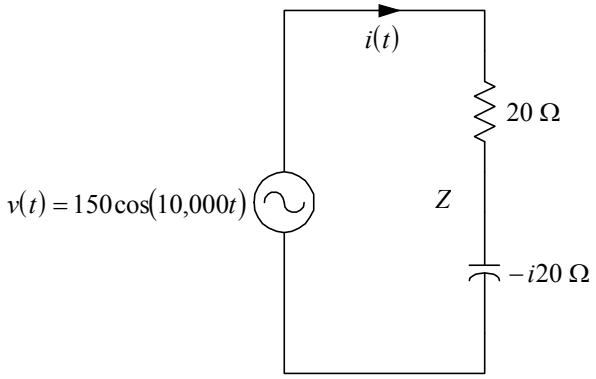
$r = |z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.18$



ดังนั้น $Z = r\angle\theta$

$\therefore \quad Z = 11.18\angle 63.4^\circ\ \Omega \Rightarrow$ *polar form* **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.14 อนุกรม RC มี $R = 20\Omega, C = 5\,\mu F$ และแหล่งจ่าย $v(t) = 150\cos(10{,}000t)$ โวลท์ จงคำนวณหาอิมพีแดนซ์เชิงซ้อน Z



รูปวงจรอนุกรม RC

วิธีทำ จากโจทย์ $v(t) = 150\cos(10{,}000t)$

ซึ่ง $v(t) = V_m\cos(\omega t)$

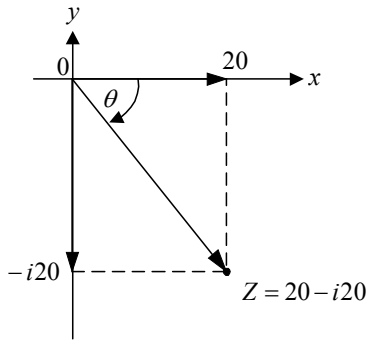
ดังนั้นได้ $\omega = 10{,}000\ rad/\sec$

$\because \quad X_c = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{10{,}000\times 5\times 10^{-6}} = 20\Omega$

ดังนั้น $z = R - iX_C$

$\therefore \quad z = 20 - i20\Omega$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-20}{20}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1)$$



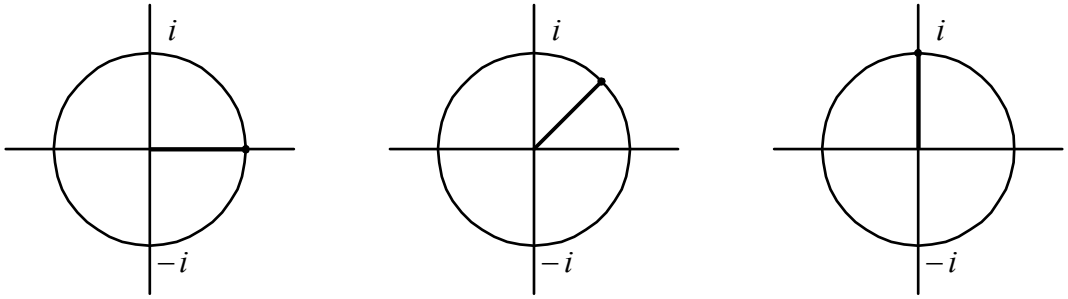
$\therefore \quad \theta = -45^\circ$

$r = |z| = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.3$

$\therefore \quad Z = r\angle\theta = 28.3\angle -45^\circ\ \Omega$ **ตอบ**

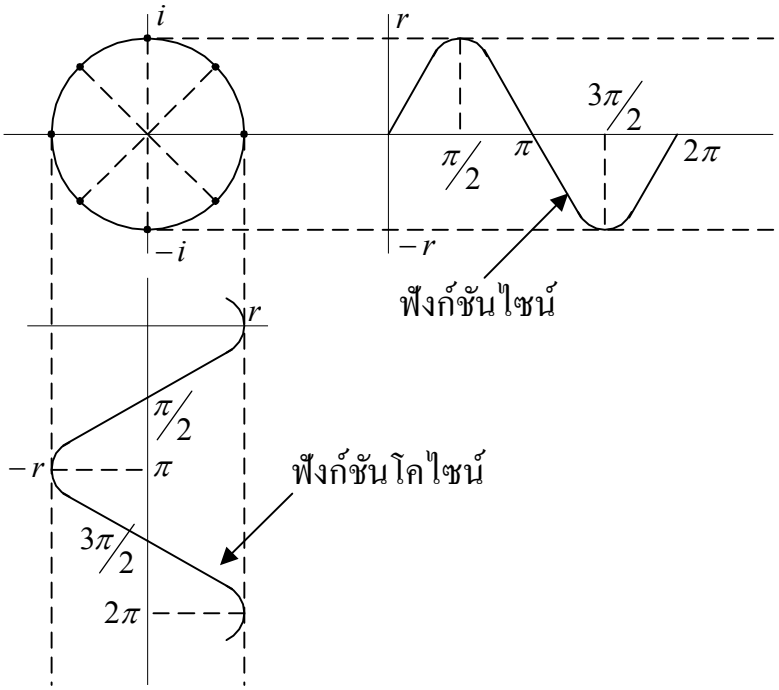
1.7.2. เฟสเซอร์ (phasor)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(t) = re^{i\omega t}$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ประกอบด้วยตัวแปร t และมีค่าสัมบูรณ์เป็นค่าคงที่เท่ากับ R ซึ่งถ้าแกน r (ค่า r) หมุนทวนเข็มนาฬิกาที่เวลาต่าง ๆ เช่นที่ $t = 0, t = \pi/4\omega$ และ $t = \pi/2\omega$ ดังรูปที่ 1.14 แล้ว (ลักษณะคล้ายกับเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ โดยที่ตัวนำ (แกน r) เคลื่อนที่ตัดสนามแม่เหล็กที่อยู่กับที่ที่มุมต่าง ๆ) โดยปรากฏการณ์ตามธรรมชาติจะทำให้ได้รับฟังก์ชันสองฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ ดังรูปที่ 1.15 โดยทั้งนี้ จะเป็นความจริงเนื่องจากสูตรของ Euler กล่าวคือ $e^{i\omega t} = \cos\omega + i\sin\omega t$



(ก) $t = 0,\ \omega t = 0$ (ข) $t = \frac{\pi}{4},\ \omega t = \frac{\pi}{4}$ (ค) $t = \frac{\pi}{2},\ \omega t = \frac{\pi}{2}$

รูปที่ 1.14 ฟังก์ชัน $f(t) = re^{i\omega t}$



รูปที่ 1.16 (ก) ไทม์โดเมน (time domain)
(ข) รูปคลื่น (waveform)

จากการพิจารณาวงจรอนุกรม RL ในรูปที่ 1.10 เมื่อแหล่งจ่ายแรงดัน $v(t) = V_m \sin \omega t$ เราจะพบว่ากระแสจะล้าหลัง (lag) หรือเกิดขึ้นช้ากว่าแรงดันไป θ ทั้งนี้ $\theta = \tan^{-1}(\omega L / R)$ กล่าวคือ $i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta)$ ซึ่งกระแสจะเลื่อนไปทางขวามือเท่ากับ θ ดังรูปที่ 1.16 (ข) และเพราะว่ามุมเป็น $-\theta$ ดังนั้นกระแส ซึ่งแทนด้วยเฟสเซอร์จึงอยู่ในควอดแดรนท์ที่ 4 ดังรูปที่ 1.16 (ก) และทั้งนี้ θ จะมีค่าไม่เกิน $\pm 90^\circ$ หรือ $\pm \pi / 2$ เรเดียน $\left(-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2\right)$

รูปคลื่นไซน์ (Sinusoids)

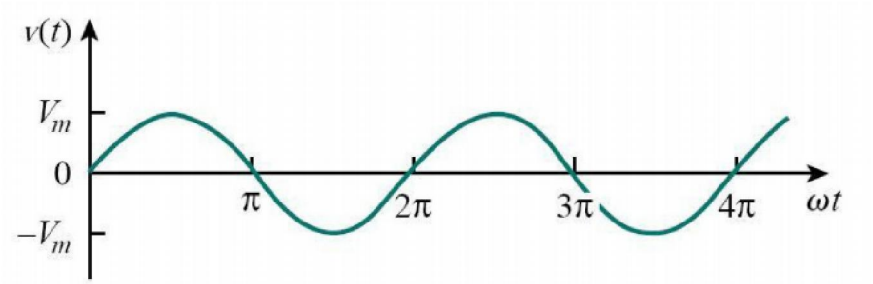
$$v(t) = \mathrm{V}_m \sin \omega t$$

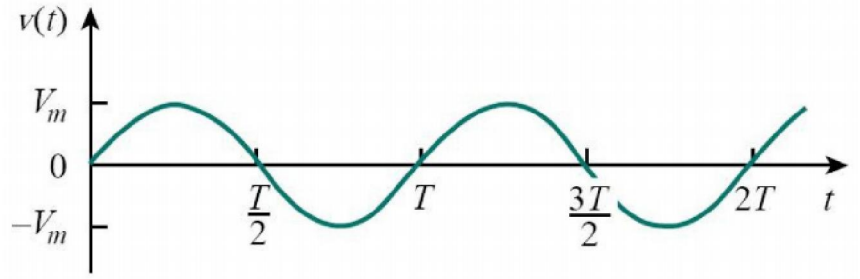
V_m = the ***amplitude*** of the sinusoid

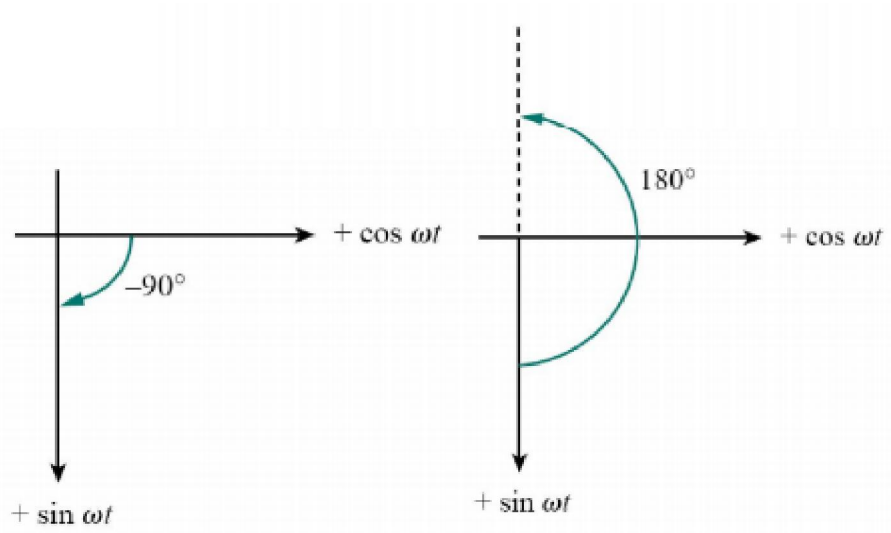
ω = the ***angular*** frequency in radians/s

ωt = the ***argument*** of the sinusoid

	สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 4-6	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204







$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

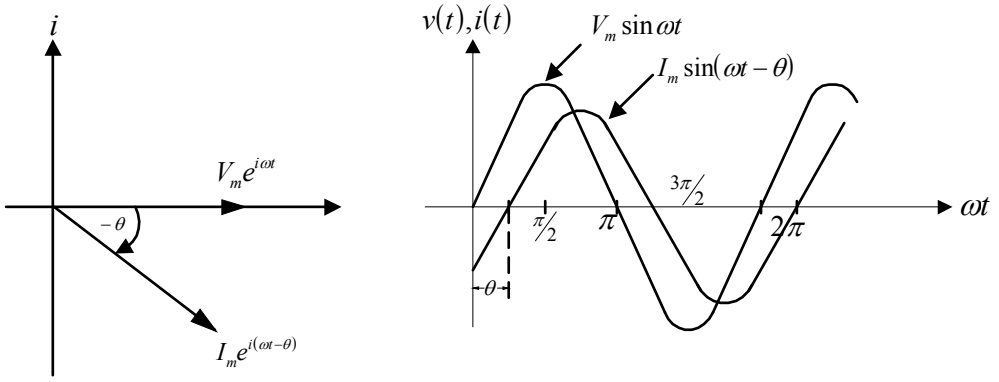
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(\omega t \pm 180°) = -\sin \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 180°) = -\cos \omega t$$

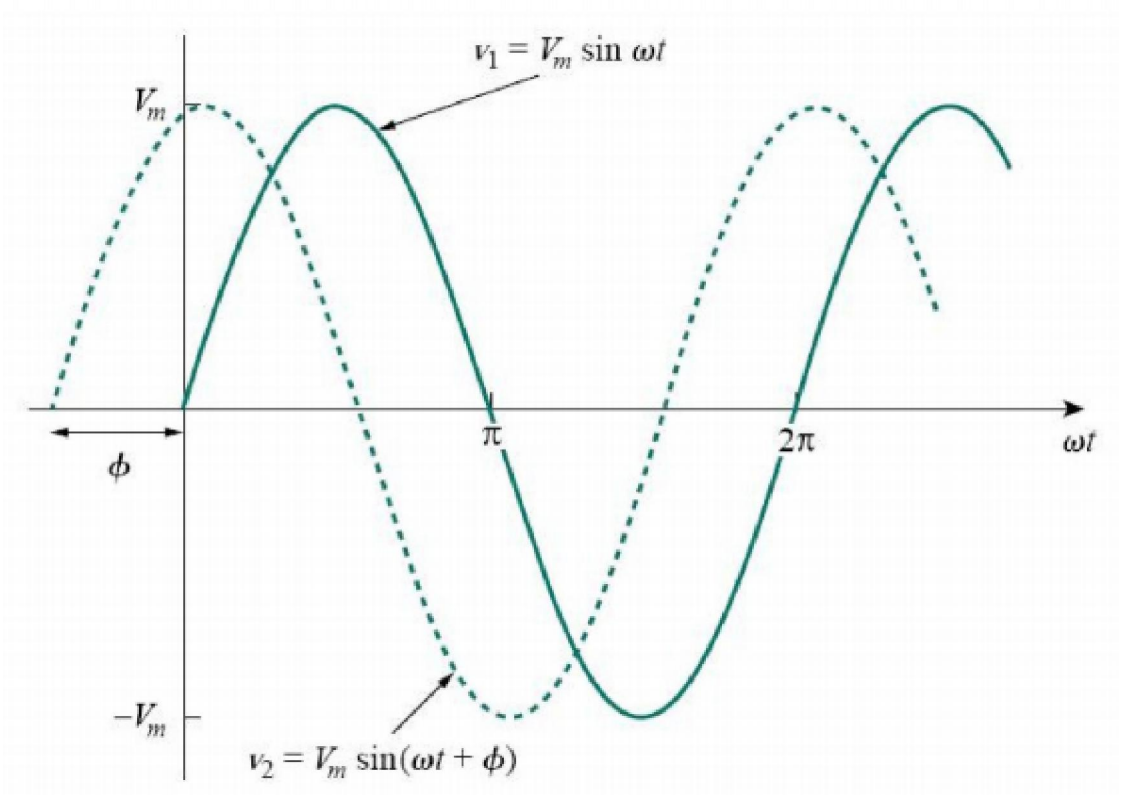
$$\sin(\omega t \pm 90°) = \pm \cos \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 90°) = \mp \sin \omega t$$



(ก) (ข)

รูปที่ 1.16 (ก) ไทม์โดเมน (time domain)
(ข) รูปคลื่น (waveform)



$$v_1(t) = \mathrm{V}_m \sin \omega t$$
$$v_2(t) = \mathrm{V}_m \sin(\omega t + \phi)$$

จำนวนเชิงซ้อน z สามารถเขียนให้อยู่ในรูป polar form หรือ exponential ได้ดังนี้

$$z = r\angle\phi = re^{j\phi}$$

เมื่อ r คือขนาดของ z และ ϕ คือมุมเฟสของ z เราก็จะสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนออกเป็นสามรูปแบบคือ

$z = x + jy$ Rectangular form

$z = r\angle\phi$ Polar form

$z = re^{j\phi}$ Exponential form

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ถ้าเราทราบค่า r และ ϕ เราก็จะสามารถหาค่า x และ y ได้

$$x = r\cos\phi\ ,\ y = r\sin\phi$$

ดังนั้น ค่า z สามารถเขียนได้ในรูปแบบต่างๆ ดังนี้

$$\boxed{z = x + jy = r\angle\phi = r(\cos\phi + j\sin\phi)}$$

$v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$ (Time-domain representation) $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{V} = V_m\angle\phi$ (Phasor-domain representation)

Sinusoid-phasor transformation.

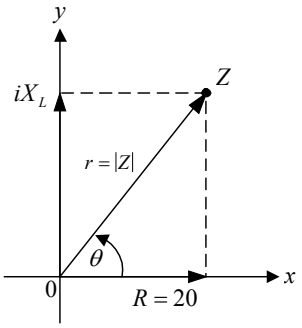
Time-domain representation	Phasor-domain representation
$V_m\cos(\omega t + \phi)$	$V_m\angle\phi$
$V_m\sin(\omega t + \phi)$	$V_m\angle\phi - 90°$
$I_m\cos(\omega t + \theta)$	$I_m\angle\theta$
$I_m\sin(\omega t + \theta)$	$I_m\angle\theta - 90°$

ตัวอย่างที่ 1.9 วงจรอนุกรมประกอบด้วย $R = 20\ \Omega$ และ $L = 0.02\ H$ มีอินพีแดนซ์ $40\angle\theta$ จงคำนวณหามุม θ และความถี่ f

วิธีทำ

อิมพีแดนซ์ของวงจรคือ $Z = R + iX_L$

$$Z = 20 + iX_L = 40\angle\theta = r\angle\theta$$



จากรูปและสมการข้างบนนี้จะได้

$$r = 40$$

$$\because \cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\because \quad \theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$$

$$\because \quad X_L = r\sin\theta$$

$$= 40\sin 60^\circ = 34.6\ \Omega$$

ตรวจสอบ	R	=	20				
$\because$	R	=	$r\cos\theta$ =	$40\cos 60^\circ$	=	$20\ \Omega$	

$$\because \quad X_L = \omega L = 2\pi f L$$

$$\therefore \quad f = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{34.6}{2\pi(0.02)} = 275\ H_z$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} X_L = 34.6\ \Omega \\ f = 275\ H_z \end{array}\right\}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.10 ใช้เฟสเซอร์คำนวณหาผลบวกของกระแส
$i_1(t) = 14.14\sin(\omega t + 13.2^\circ)$ แอมแปร์ และ $i_2(t) = 8.95\sin(\omega t + 121.6^\circ)$ แอมแปร์

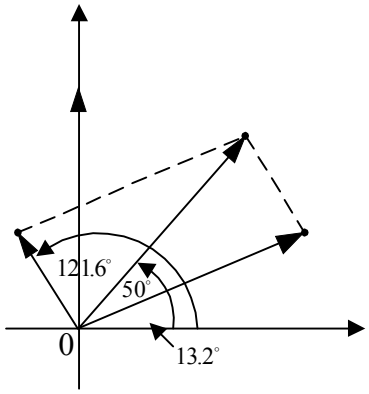
วิธีทำ $i_1(t) = 14.14\sin(\omega t + 13.2^\circ)$ ทำให้อยู่ในรูปเฟสเซอร์ (polar form) และเป็นค่า effective value ได้คือ

$$I_1 = (14.14/\sqrt{2})\angle 10.32 = 10\angle 13.2^\circ; \text{(ดูรูป)}$$

และ rectangular form คือ

$$I_1 = 100\cos 13.2^\circ + i10\sin 13.2^\circ = 9.73 + i2.28\ A$$

และเช่นเดียวกันจะได้



$$I_2 = (8.95/\sqrt{2})\angle 121.6^\circ = 6.33\angle 121.6^\circ$$

$$I_2 = -3.32 + i5.39\ A; \quad \text{(ดูรูป)}$$

$$I_1 + I_2 = 6.41 + i7.67 = 10\angle 50^\circ\ A; \quad \text{(ดูรูป)}$$

ตอบ

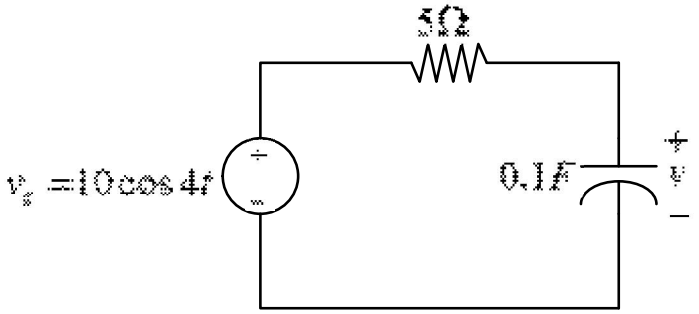
	สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 4-6	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204

วิธีสอนและกิจกรรม	**1. บอกความสำคัญของหน่วยเรียน** **2. ให้เนื้อหาโดยวิธี บรรยาย ยกตัวอย่างประกอบ** **3. ถามคำถามในห้องเรียน**	
สื่อการสอน	**หนังสืออ้างอิง**	**หมายเลข 1**
	เอกสารประกอบ	ใบเนื้อหา จำนวนเชิงซ้อน ■ กำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน ■ การนำมาใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน
	วัสดุโสตทัศน์	**Power point บทที่ 1 และ LCD Projector**
งานที่มอบหมาย	**ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน**	
การวัดผล	**1. สังเกตความสนใจในห้องเรียน** **2. การตอบคำถามขณะเรียน** **3. ตรวจผลงานจากแบบฝึกหัดที่มอบหมาย**	

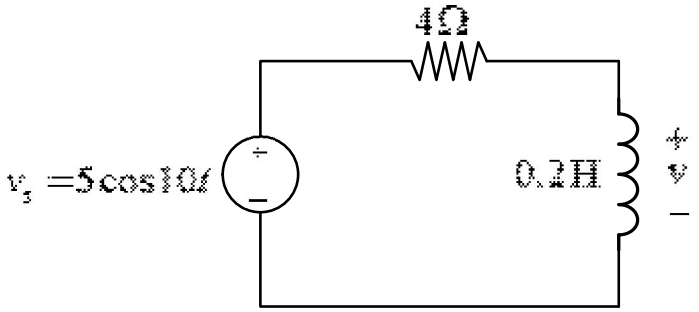
	สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 4-6	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204

แบบฝึกหัด

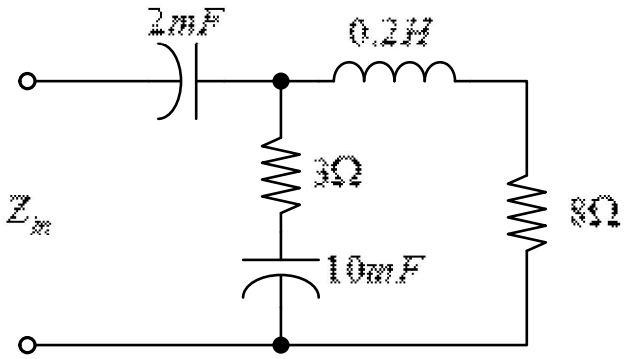
1. จงหากระแสที่ไหลในวงจร และ แรงดันที่ตกคร่อม C



2. จงหากระแสที่ไหลในวงจร และ แรงดันที่ตกคร่อม L

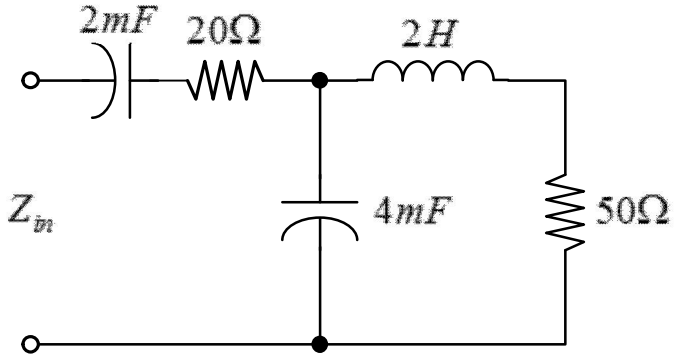


3. จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวมของวงจร

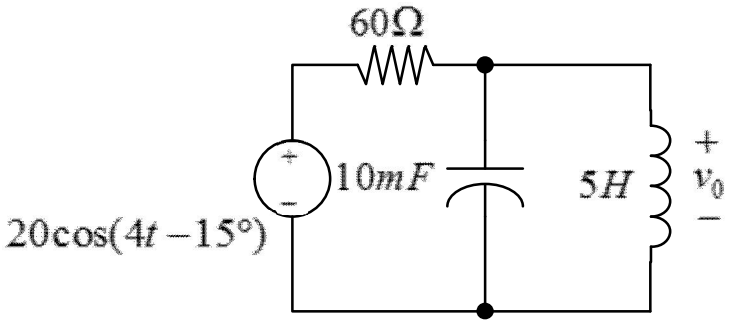


	สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 4-6	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204

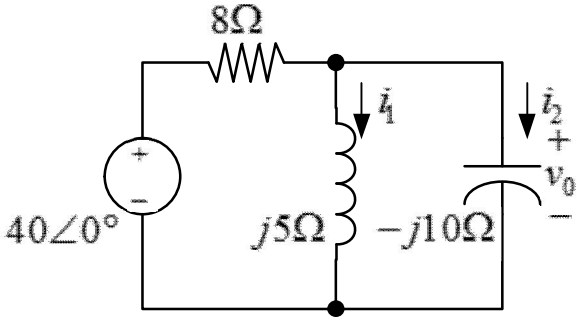
4. จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวมของวงจร



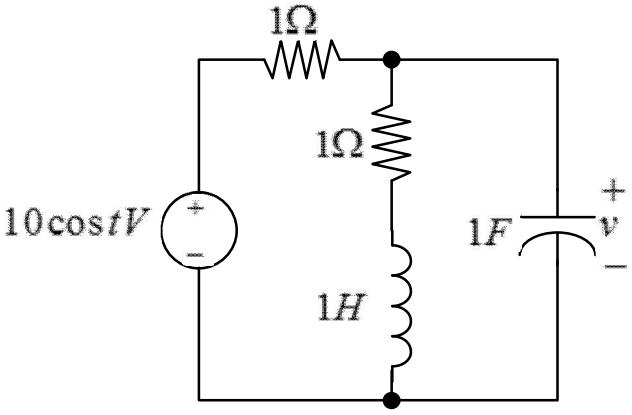
5. จงหาค่าแรงดัน v_0



6. จงหาค่ากระแส $i_1(t)$ และ $i_2(t)$

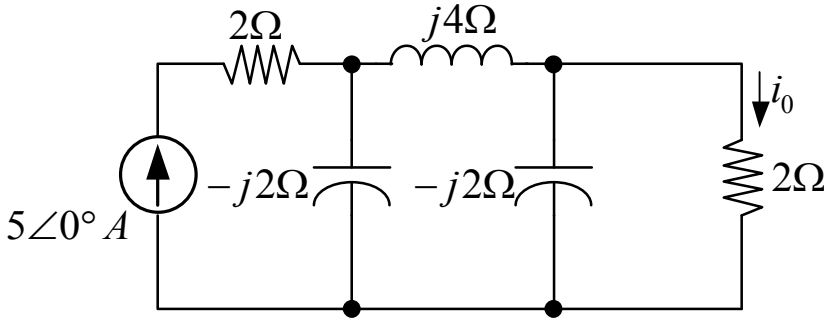


7. จงหาค่าแรงดันที่ตกคร่อม C

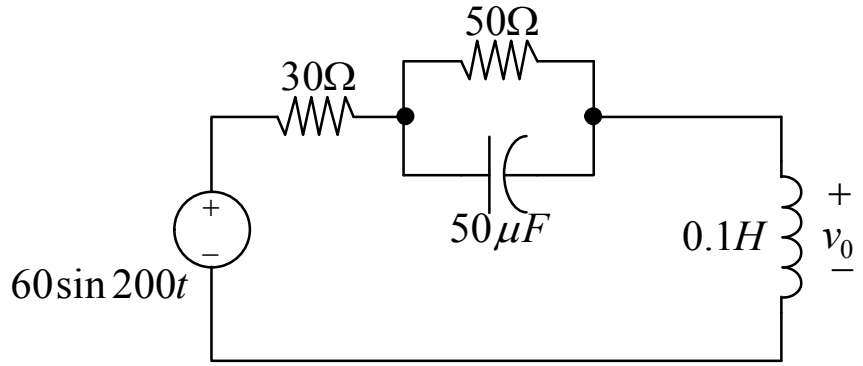


	สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รายวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้า
	คาบเรียนที่ 4-6	หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	รหัสวิชา 32081204

8. จงหาค่ากระแส i_0



9. จงคำนวณหาค่าแรงดัน v_0



10. จงหาค่ากระแส I และค่าอิมพีแดนซ์รวม Z_T