

10.7 การแปลงผกผันลาปลาซ (Inverse laplace transforms)

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ จะได้ผล คือ $F(s)$ การแปลงผกผันลาปลาซ หมายถึง การแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ เมื่อทราบผลของ $F(s)$ แล้ว

นียมการแปลงผกผันลาปลาซ

(Definition of inverse laplace transform)

ถ้า $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

ดังนั้น การแปลงผกผันของ $F(s)$ จะเป็นผลของ $f(t)$ จะเขียนแทนด้วย

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

ตารางการ Inverse ของบาง Function

$\bar{f}(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างเช่น

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$

หรือ $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}$

การหาผลการแปลงผกผันลาปลาซ

(Finding inverse laplace transforms)

การแปลงผกผันลาปลาซของฟังก์ชันสามารถใช้ตารางที่ 10.3 ซึ่งการแปลงลาปลาซจะแปลงจากตารางด้านซ้ายมือ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

การแปลงผกผันลาปลาซจะแปลงจากตารางด้านขวามือ $F(s)$ เป็น $f(t)$

ดังนั้น จะได้ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

ตัวอย่างที่ 10.31 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2 + 25}\right\}$

วิธีทำ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2 + 25}\right\} = \sin 5t$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างที่ 10.32 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\}$

วิธีทำ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$
 $= 3e^{2t}$

คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของการแปลงผกผันลาปลาซ (Some important properties of Inverse Laplace Transforms)

คุณสมบัติการแปลงผกผันลาปลาซจะเป็นผลมาจากการแปลงลาปลาซในบทที่ 10.4
ดังจะกล่าวถึงต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 10.7.1 คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

ถ้า C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ (constants) และ

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \text{ และ } \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$$

ดังนั้น

$$\mathcal{L}^{-1}\{C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)\} = C_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

พิสูจน์ $\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$
 $= C_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$

ตัวอย่างที่ 10.33 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\}$

วิธีทำ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}$
 $+ 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4^2}\right\}$

$= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + 5 \times \frac{\sin 4t}{4}$

$= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + \frac{5}{4} \times \sin 4t$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างที่ 10.34 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 4}{s^3}\right\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 4}{s^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\ &= 3t + 4 \times \frac{t^2}{2!} \\ &= 3t + 2t^2\end{aligned}$$

$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}

ตัวอย่างที่ 10.35 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4 + 3s}{4s^2 - 16}\right\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4 + 3s}{4s^2 - 16}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 - 16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{4s^2 - 16}\right\} \\ &= \frac{4}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - \frac{16}{4}}\right\} + \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - \frac{16}{4}}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 4}\right\} + \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - 4}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 - (2)^2}\right\} + \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - (2)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \sinh 2t + \frac{3}{4} \cosh 2t \end{aligned}$$

$\frac{1}{s - a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$

ทฤษฎีที่ 10.7.2 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 1 (First shifting property)

ถ้า $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ แล้ว

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} \cdot f(t)$

นั่นคือ

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

ตัวอย่างที่ 10.36 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 2)^4}\right\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 2)^4}\right\} &= e^{2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} \\ &= \frac{e^{2t}}{3!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\} = \frac{e^{2t} t^3}{6} \end{aligned}$$

$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s - a}$	e^{at}

ตัวอย่างที่ 10.37 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+3}\right\}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+3}\right\} &= 2e^{-2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\} \\ &= \frac{2e^{-2t}}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\} \\ &= \frac{2e^{-2t}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t\end{aligned}$$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างที่ 10.38 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\}$

วิธีทำ ทำตัวส่วนให้อยู่ในรูป $F(s - a)$ จะได้

$$s^2 - 2s + 5 = (s - 1)^2 + 4$$

$$\text{ดังนั้น } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 1)^2 + 4}\right\}$$

$$= e^{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + (2)^2}\right\}$$

$$= \boxed{\phantom{\frac{1}{2} e^t \sin 2t}}$$

$$= \frac{1}{2} e^t \sin 2t$$

$\frac{1}{s - a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$

ทฤษฎีที่ 10.7.3 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 2 (Second shifting property)

$$\text{ถ้า } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ แล้ว}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t - a) u_a(t) \text{ เมื่อ } a \geq 0$$

$$\text{หรือ } \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t - a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 10.39 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-3s}}{s^2 + 4}\right\}$

วิธีทำ เลื่อน e^{-3s} จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-3s}}{s^2 + 4}\right\} = \cos 2(t - 3)u_3(t)$$

ตัวอย่างที่ 10.40 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-5s}}{s^2+2s+1}\right\}$

วิธีทำ เลื่อน e^{-5s} จะได้

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{s^2+2s+1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}^2}\right\} \frac{1}{(s+1)} \\ &= e^t \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \right] = e^t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-5s}}{s^2+2s+1}\right\} &= e^{t-5} \\ f(t) &= e^t = e^{(t-5)}\end{aligned}$$

$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n=0,1,2,3,\dots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}

ทฤษฎีที่ 10.7.4 การแปลงผกผันลาปลาซของอนุพันธ์ (Inverse Laplace transform of derivatives)

ถ้า $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ แล้ว

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$$

ตัวอย่างที่ 10.41 ถ้า $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ จงหา $\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$

วิธีทำ $\because \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \sin t$

และ $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} = F'(s)$

\therefore จากสมการที่ (2.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{(s^2 + 1)^2}\right] \\ &= (-1)^1 t^1 \sin t \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{(s^2 + 1)^2}\right] = -t \sin t$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right] = \frac{1}{2} t \cdot \sin t$$

$\frac{1}{s - a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$

ตอบ

ทฤษฎีที่ 10.7.5 การแปลงผกผันลาปลาซของอินทิกรัล (Inverse Laplace transform of integrals)

$$\text{ถ้า } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ แล้ว}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(s) ds\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

ตัวอย่างที่ 10.42 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{s(s+1)} ds\right\}$

วิธีทำ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย จะได้ $F(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 1 - e^{-t} = f(t)\end{aligned}$$

จากทฤษฎีที่ 10.7.5

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(s) ds\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

$$\text{ดังนั้น } \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{s(s+1)} ds\right\} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

ทฤษฎีที่ 10.7.6 ทฤษฎีของคอนโวลูชัน (Convolution Theorem)

ทฤษฎีของคอนโวลูชันเป็นวิธีหนึ่งจากคุณสมบัติการแปลงผกผันลาปลาซที่ได้กล่าวมาแล้ว และการแปลงผกผันลาปลาซที่อยู่ในรูปผลคูณ สามารถใช้ทฤษฎีของคอนโวลูชัน กล่าวคือ

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= f(t) \text{ และ } \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t) \text{ แล้ว} \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= \int_0^t f(u)g(t-u) du = f * g \end{aligned}$$

$f * g$ เรียกว่า คอนโวลูชันของ f และ g
และ $f * g = g * f$ จะพิสูจน์ได้ ดังนี้

พิสูจน์

$$\text{ถ้า } t - u = v \text{ หรือ } u = t - v$$

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$= \int_0^t f(t-v)g(v)dv$$

$$= \int_0^t g(v)f(t-v)dv$$

$$= g * f$$

$$\text{ดังนั้น } f * g = g * f$$

ตัวอย่างที่ 10.43 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$ โดยใช้ทฤษฎีของคอนโวลูชัน

วิธีทำ $\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$ แยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s}{s^2 + a^2} \cdot \frac{1}{s^2 + a^2} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} = \cos at \quad \text{และ} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีของคอนโวลูชัน จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \int_0^t \cos au \cdot \frac{\sin a(t-u)}{a} du$$

ดังนั้น จากทฤษฎีของคอนโวลูชัน จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \int_0^t \cos au \cdot \frac{\sin a(t-u)}{a} du$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^t (\cos au)(\sin at \cos au - \cos at \sin au)du$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \cos^2 au du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \sin au \cos au du$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \int_0^t \left(\frac{1 + \cos 2au}{2}\right) du - \frac{1}{a} \cos at \int_0^t \frac{\sin 2au}{2} du$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a} \cos at \left(\frac{1 - \cos 2at}{4a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \sin at \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin at \cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a} \cos at \left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$

$$= \frac{t \sin at}{2a}$$

ทฤษฎีที่ 10.7.7 เศษส่วนย่อย (Partial fractions)

การหาผลแปลงผกผันลาปลาซที่อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) ของ s จะเขียนได้ คือ

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

โดยที่ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ของ S และ $P(s)$ มีดีกรีน้อยกว่า $Q(s)$ สามารถแยกตัวประกอบได้

ในรูปแบบ $\frac{A}{(as + b)^r}$ หรือ $\frac{As + B}{(as^2 + bs + c)^r}$ เมื่อ $r = 1, 2, 3, \dots$

เราสามารถแยก $F(s)$ เป็นเศษส่วนย่อยได้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 10.44 จงแยกส่วนย่อยของ $\frac{2s - 5}{(3s - 4)(2s + 1)^3}$

วิธีทำ
$$\frac{2s - 5}{(3s - 4)(2s + 1)^3} = \frac{A}{3s - 4} + \frac{B}{(2s + 1)^3} + \frac{C}{(2s + 1)^2} + \frac{D}{(2s + 1)}$$

ตัวอย่างที่ 10.45 จงแยกเศษส่วนย่อยของ $\frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 - 2s + 4)^2(s - 5)}$

วิธีทำ
$$\frac{3s^2 - 4s + 2}{(s^2 + 2s + 4)^2(s - 5)} = \frac{As + B}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 4} + \frac{E}{s - 5}$$

ในหาค่าคงที่ A, B, C... จะสามารถหาได้โดยวิธีต่อไปนี้

1. โดยวิธีลิมิต (ใช้เฉพาะ Q(s) อยู่ในรูป (as + b)^r จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่ง ซึ่งไม่เป็นแฟกเตอร์ซ้ำ
2. โดยวิธีกำหนดค่า (s) จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่งซึ่งซ้ำ หรือเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่ง ปนกับแฟกเตอร์กำลังสอง
3. โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังสองทั้งหมดหรือ เป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่งทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 10.46 จงหาค่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}\right\}$

วิธีทำ จากส่วน $s^2 - 2s - 3 = (s - 3)(s + 1)$ ดังนั้น

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{(s - 3)(s + 1)}\right\} \text{ แยกเศษส่วนย่อยได้}$$

$$\frac{3s + 7}{(s - 3)(s + 1)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 1}$$

วิธีที่ 1

หาค่า A, B โดยวิธีลิมิต จะได้

$$A = \lim_{s \rightarrow 3} \left\{ \frac{3S + 7}{(S + 1)} \right\} = \frac{16}{4} = 4$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ \frac{3S + 7}{(S - 3)} \right\} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3S + 7}{(S^2 - 2S - 3)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{S - 3} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S + 1} \right\} \\ &= 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S - 3} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S + 1} \right\} \\ &= 4 e^{3t} - e^{-t} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

หาค่า A, B โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\frac{3S + 7}{(S - 3)(S + 1)} = \frac{A}{S - 3} + \frac{B}{S + 1}$$

นำ $(S - 3)(S + 1)$ คูณตลอด จะได้

$$\begin{aligned} 3s + 7 &= A(S + 1) + B(s - 3) \\ &= AS + A + BS - 3B \\ &= (A + B)S + (A - 3B) \end{aligned}$$

$$3S = (A + B)S \quad \text{..... 1}$$

$$7 = (A - 3B) \quad \text{..... 2}$$

นำ ① - ② จะได้ $-4 = B - (-3B) = 4B$

ดังนั้น $B = \frac{-4}{4} = -1$

นำ $B = -1$ แทนใน ① จะได้

$$3 = (A - 1)$$

ดังนั้น $A = 3 + 1 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{(S^2 - 2S - 3)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{S - 3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S + 1}\right\} \\ &= 4e^{3t} - e^{-t} \end{aligned}$$

หมายเหตุ จะเห็นว่าวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 10.47 จงหาค่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S + 1)(S - 2)^3}\right\}$

วิธีทำ จากโจทย์แยกเป็นเศษส่วนย่อย คือ

$$\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S + 1)(S - 2)^3} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s - 2)^3} + \frac{C}{(s - 2)^2} + \frac{D}{(s - 2)}$$

หาค่า A, B โดยวิธีลิมิต ดังนี้

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ \frac{5S^2 - 15S - 11}{(S - 2)^3} \right\} = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow 2} \left\{ \frac{5S^2 - 15S - 11}{(S + 1)} \right\} = -\frac{21}{3} = -7$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}$ และ $B = -7$ ลงในสมการเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S + 1)(S - 2)^3} = \frac{-1/3}{s + 1} + \frac{(-7)}{(S + 2)^3} + \frac{C}{(s - 2)^2} + \frac{D}{(s - 2)}$$

หาค่า C, D โดยวิธีกำหนดค่า $s = 0$ และ $s = 1$ ในสมการจะได้

$$\text{แทน } s = 0, \frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{D}{2} \quad \dots\dots\dots 1$$

$$\frac{33 + 8 - 21}{24} = \frac{6C - 12D}{24}$$

$$20 = 6C - 12D$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 10 = 3C - 6D \quad \dots\dots\dots 2$$

$$\text{แทน } s = 1, \frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - D \quad \dots\dots\dots 3$$

$$\frac{21}{2} = \frac{-1 + 42 + 6C - 6D}{6}$$

$$\frac{21}{2} = \frac{41 + 6C - 6D}{6}$$

$$\frac{63 - 41}{6} = \frac{6C - 6D}{6}$$

$$22 = 6C - 6D$$

หรือ $11 = 3C - 3D$ 4

นำ ② - ④ จะได้

$$-1 = -3D$$

$$\therefore D = \frac{1}{3}$$

นำ $D = \frac{1}{3}$ แทนใน ④ จะได้

$$11 = 3C - (3)\frac{1}{3}$$

$$11 = 3C - 1$$

$$C = \frac{12}{3} = 4$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}$, $B = -7$, $C = \frac{1}{3}$ และ $D = 4$ จะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S+1)(S-2)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1/3}{(s-2)}\right\} \\ &= -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} + 4te^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10.48 จงหาค่า $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)}\right\}$

วิธีทำ จากโจทย์แยกเป็นเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)} = \frac{A}{(S + 2)} + \frac{BS + C}{(S^2 + 2)}$$

หาค่า A, B โดยวิธีกำหนดค่า

นำ $(s + 2)(s^2 + 2)$ คูณตลอดจะได้

$$7s^2 + 8s + 6 = A(S^2 + 2) + BS + C(S + 2)$$

กำหนดให้ $S = -2$ จะได้

$$18 = 6A \quad \therefore A = 3$$

กำหนดให้ $S = 0$

$$6 = 2A + 2C$$

$$6 = 6 + 2C \quad \therefore C = 0$$

กำหนดให้ $s = 1$

$$21 = 3A + 3B$$

$$= 9 + 3B$$

$$21 - 9 = 3B \quad \therefore B = 4$$

แทนค่า A, B, C ลงในสมการเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{7s^2 + 8s + 6}{(s + 2)(s^2 + 2)} = \frac{3}{(s + 2)} + \frac{4s}{(s^2 + 2)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{7s^2 + 8s + 6}{(s + 2)(s^2 + 2)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s + 2)} + \frac{4s}{(s^2 + 2)} \right\} \\ &= 3e^{-2t} + 4 \cos \sqrt{2} t \end{aligned}$$
