ครั้งที่ 2

1.6 กำลังและรากของจำนวนเชิงซ้อน

1.6.1 กำลัง (Power)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^2 = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2$$

$$= r^2[\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta]$$

$$= r^2[\cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta]$$

จาก $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\therefore \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)$$

$$= \cos 2\theta$$

$$\therefore z^2 = r^2(\cos 2\theta + i2\sin\theta\cos\theta)$$

จาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\therefore z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

และ $z^{-2} = r^{-2}(\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta))$

$$\therefore \boxed{z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]}$$

ถ้า $|z| = r = 1$

จะได้

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

De Moive

Abraham De Moive

1.6.2 ราก (Root)

ถ้า $z = w^n$ จะได้ $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$

ให้ $w = R(\cos\phi + i\sin\phi)$

ได้ $w^n = z = R^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n$

$w^n = z = R^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

พอ $w^n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

โดย $R^n = r$ ดังนั้น $\therefore R = \sqrt[n]{r}$

จะ $n\phi = \theta + 2k\pi$

$$\therefore \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

ดังนั้น

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Ex หา $w = \sqrt{z}$

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

ที่ $n=2$; $w = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)\right]$

ที่ $k=0$

$$w_0 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Ex หาค่า $\sqrt{4i}$ ที่ $K=0$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$$

$$n=2;\ k=0$$

$$r=|z|=|4i|=\sqrt{4^2}=\pm 4$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\left(\frac{4}{0}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sqrt{z}=\pm\sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/2}{2}\right)\right]$$

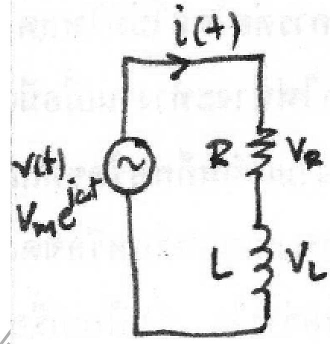
$$\sqrt{4i}=\pm 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\pm 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{4i}=\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{2}) \longleftarrow$$

1.7 การนำจำนวนเชิงซ้อนมาใช้งาน

1.7.1 อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน (Complex impedance)



$$v(t)=V_m e^{j\omega t}$$

$$=V_m(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

$$V_R+V_L=V_m e^{j\omega t}$$

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=V_m e^{j\omega t}$$

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=V_m e^{j\omega t}$$

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{V_m}{L}e^{j\omega t}$$

$$y(x)=e^{-h}\left[\int e^{h} r(x)\,dx+C\right]$$

$$\therefore \text{~~i(t)~~} = \boxed{h(t) = \int f(x)\,dx}$$

$$\therefore\ i(t) = e^{-h}\left[\int e^{h}\,\frac{V_m}{L}\,e^{j\omega t}\,dt + C\right]$$

$$r(x) = r(t) = \frac{V_m}{L}\,e^{j\omega t} \qquad f(t) = \frac{R}{L}$$

$$\therefore\ h = \int \frac{R}{L}\,dt \ ;\ h = \frac{R}{L}t$$

$$\therefore\ i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,e^{j\omega t}\,dt + C\right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{L}\int e^{\left(\frac{R}{L}+j\omega\right)t}\,dt + C\right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{L}\left(\frac{L}{R+j\omega L}\right)\int e^{\left(\frac{R+j\omega L}{L}\right)t}\,d\left(\frac{R+j\omega L}{L}\right)t + C\right]$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{V_m}{R+j\omega L}\,e^{\frac{R}{L}t}\cdot e^{j\omega L t} + C\right]$$

$$= \frac{V_m}{R+j\omega L}\,e^{\frac{R}{L}t}\,e^{j\omega t}\cdot e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t}C$$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{R+j\omega L}\,e^{j\omega t} + e^{-\frac{R}{L}t}C} \qquad (1.42)$$

$i(t)$ ประกอบด้วย 2 เทอม คือ (เทอม) ~~[illegible]~~

สภาวะอยู่ตัว (Steady state) $= \frac{V_m}{R+j\omega L}\,e^{j\omega t}$

สภาวะชั่วครู่ (Transient state) $= e^{-\frac{R}{L}t}\cdot C$

$R+j\omega L$

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะสภาวะอยู่ตัวโดย

$$i(t) = \frac{V_m}{R+j\omega L} e^{j\omega t}$$

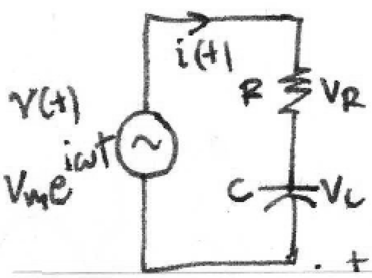
ดังนั้น อิมพีแดนซ์เชิงซ้อนคือ

$$Z = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{V_m e^{j\omega t}}{R+j\omega L}} = R+j\omega L$$

$$\therefore \boxed{Z = R+j\omega L} \rightarrow Z = R+jX_L$$

เป็น อิมพีแดนซ์เชิงซ้อน

วงจร R-C อนุกรม



$$V_R + V_C = V_m e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \frac{j\omega V_m \cdot C e^{j\omega t}}{1+j\omega RC} + C e^{-\frac{t}{RC}}$$

คิดเฉพาะสภาวะอยู่ตัว

นำ $j\omega C$ หารตลอดจะได้

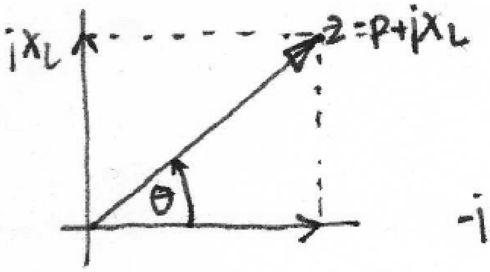
$$= \frac{\frac{j\omega V_m C e^{j\omega t}}{j\omega C}}{\frac{1+j\omega RC}{j\omega C}} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{1}{j\omega C}+R}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_m e^{j\omega t}}{R - j\frac{1}{\omega C}}$$

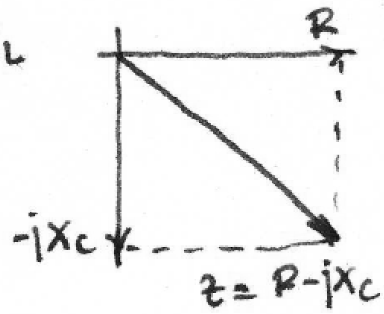
$$\therefore Z = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{V_m e^{j\omega t}}{R - j\frac{1}{\omega C}}}$$

$$\boxed{Z = R - j\frac{1}{\omega C}} \rightarrow Z = R - jX_C$$

RL อนุกรม

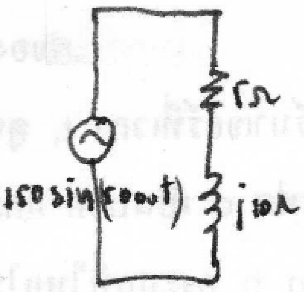


RC อนุกรม



EX $R = 5\,\Omega$; $L = 2\,mH$

$v(t) = 150 \sin(5000t)$



$\omega = 5000$

$\therefore X_L = j\omega L = j\,5000 \times 2 \times 10^{-3}$

$X_L = j10\,\Omega$

$\therefore Z = 5 + j10\,\Omega$

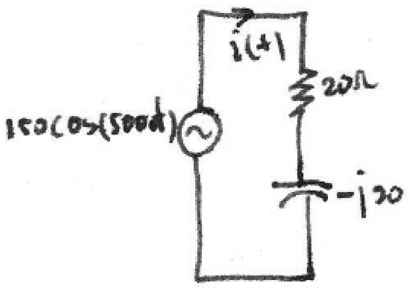
$Z = 11.18\angle 63.43^\circ\,\Omega$

$$\therefore \dot{I}(t) = \frac{150\angle 0^\circ}{11.18\angle 63.43^\circ} = 13.42\angle -63.43^\circ$$

$\therefore i(t) = 13.42 \sin(5000t - 63.43^\circ)$

$= 13.42\, e^{j(\omega t - 63.43^\circ)}$

EX1.14 $R = 20\,\Omega$; $C = 5\,\mu F$; $v(t) = 150\cos(10000t)$



$X_C = ~~-j\omega C~~$

$= -~~j\,10000\times 5~~$

$X_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$

$= -j\dfrac{1}{10000\times 5\times 10^{-6}}$

$X_C = -j20\,\Omega$

$Z = 20 - j20 = 28.28\angle{-45^\circ}\,\Omega$

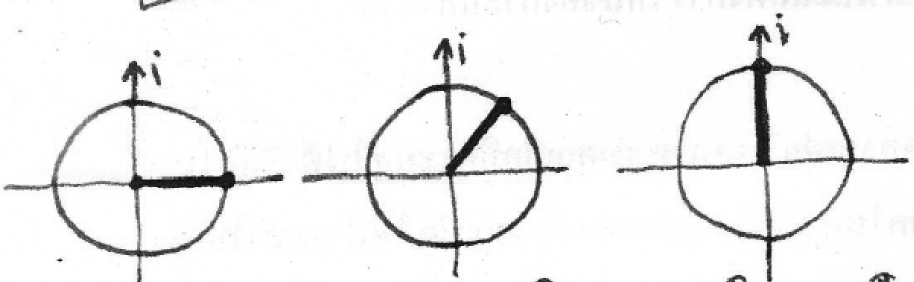
$I = \dfrac{150}{28.28\angle{-45}} = 5.30\angle{45^\circ} = 5.30e^{j(\omega t+45^\circ)}$

$i(t) = 5.30\cos(10000t + 45^\circ)$ ←

1.7.2 เฟสเซอร์ (Phasor)

$f(t) = re^{j\omega t}$

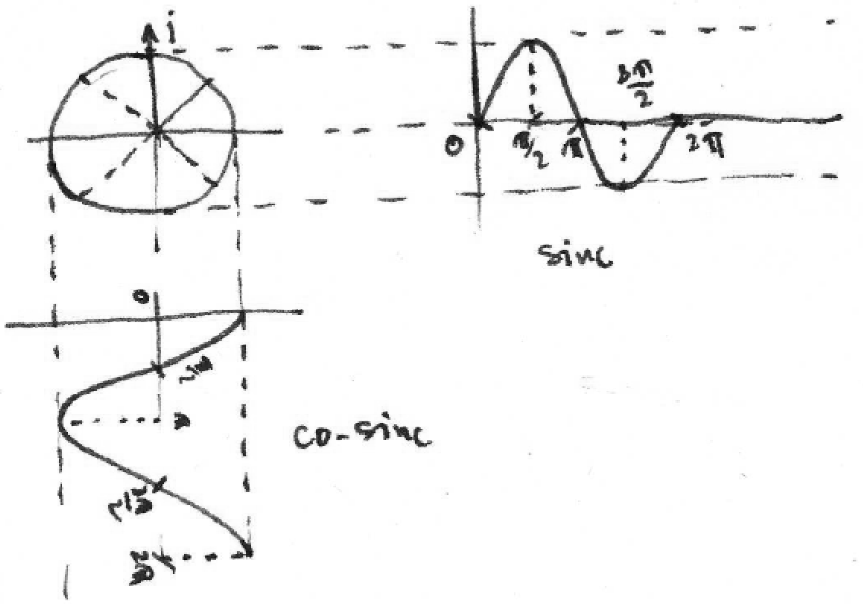
$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$



$t = 0 ; \omega t = 0$ $\quad$ $t = \dfrac{\pi}{4\omega}\ ; \omega t = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ $t = \dfrac{\pi}{2\omega}\ ; \omega t = \dfrac{\pi}{2}$

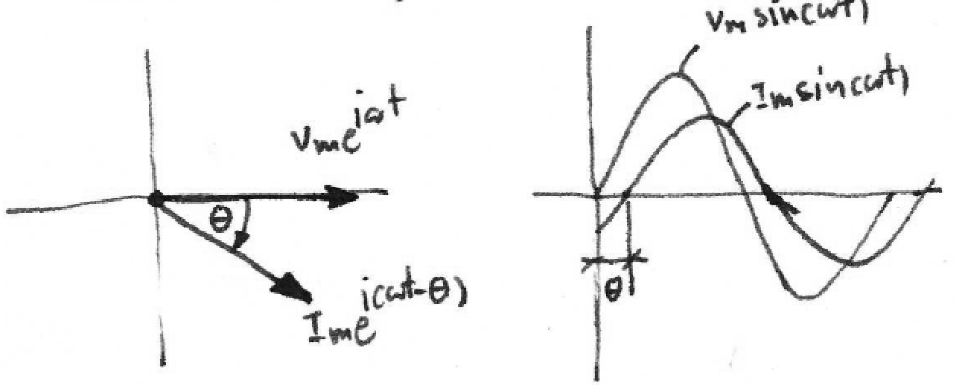
เมื่อ r หมุนไปรอบครบจะเกิดฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน

คือ $\cos\omega t$ และ $\sin\omega t$ ดังรูป

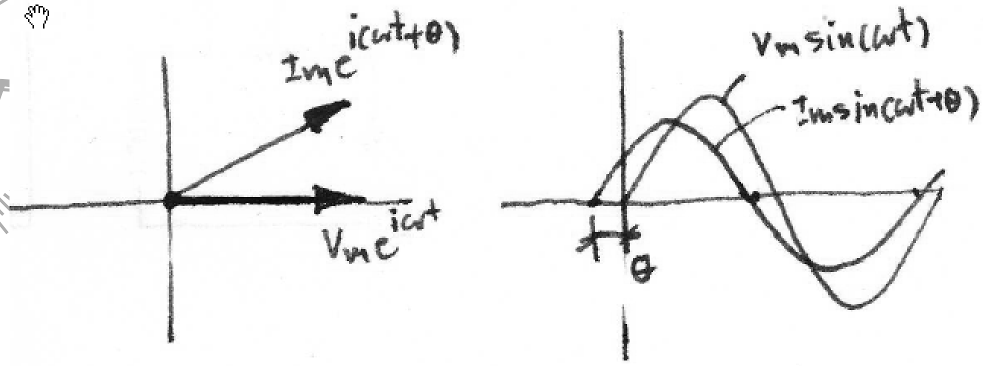


จากวงจร RL อนุกรม กระแสจะล้าหลังแรงดัน $-\theta$

เขียนเป็นเฟสเซอร์และรูปคลื่นได้ดังนี้



วงจร RC I นำหน้าแรงดัน $+\theta$

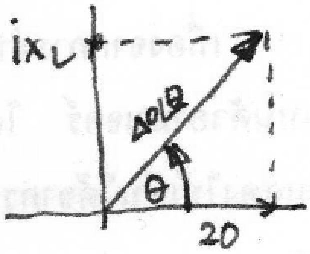


EX1.9 วงจร RL อนุกรม $R = 20\Omega ; L = 0.02H$

$Z = 40\angle\theta$ จงหา $\theta ; f$

จาก $Z = R + jX_L = 40\angle\theta$

$\therefore 40\angle\theta = 20 + jX_L$



จากรูป $r = 40$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{20}{40} = 0.5$

$\theta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$

จาก $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

หรือ $Z = r\cos\theta + rj\sin\theta$

$\therefore jX_L = rj\sin\theta = j40\sin(60^\circ)$

$jX_L = j36.64 \quad ; \quad X_L = 36.64\ \Omega$

และ จาก $X_L = \omega L = 2\pi f L \rightarrow L = 0.02$

$\therefore f = \frac{36.64}{2\pi \times 0.02} = 275.66\ Hz.$

Exา.10 จงใช้เฟสเซอร์หาผลบวกของกระแส

$$i_1(t) = 14.14\sin(\omega t + 13.2^\circ)$$

$$i_2(t) = 8.95\sin(\omega t + 121.6^\circ)$$

วิธีทำ ทำ $i_1(t)$ และ $i_2(t)$ ให้อยู่ในรูปเฟสเซอร์

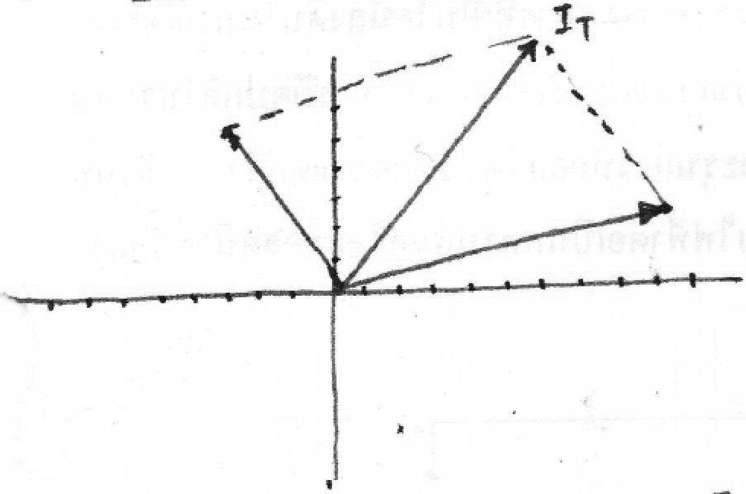
โดยใช้ค่า effective

$$\therefore\ I_1 = \frac{14.14}{\sqrt{2}}\angle 13.2^\circ = 10\angle 13.2^\circ$$

$$I_2 = \frac{8.95}{\sqrt{2}}\angle 121.6^\circ = 6.33\angle 121.6^\circ$$

$$I_1 = 10\angle 13.2^\circ = 9.736 + j2.283$$

$$I_2 = 6.33\angle 121.6^\circ = -3.32 + j5.39$$



$$I_T = [9.736 - 3.32] + j[2.283 + 5.39]$$

$$= 6.42 + j7.67$$

$$I_T = 10.01\angle 50.01^\circ \text{ A}$$