เวกเตอร์ [Vector]

นิยาม

สเกลาร์ คือ ปริมาณเฉพาะขนาด ไม่มีทิศทาง

เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง

สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์

ใช้เส้นตรงมีหัวลูกศรกำกับ

จุดเริ่มต้น P (initial point)

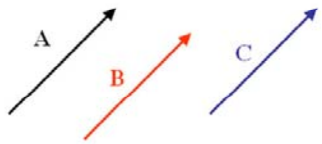
จุดสิ้นสุด Q (terminal point)

$\vec{PQ}$ แทนเวกเตอร์ หรือ $\vec{PQ} = \vec{a}$

ขนาดของ $\vec{PQ}$ คือ $|\vec{PQ}|$ หรือ $|\vec{a}|$

- เวกเตอร์ศูนย์
  - มีขนาดเท่ากับศูนย์
  - ทิศทางไม่จำกัด

$\vec{0}$



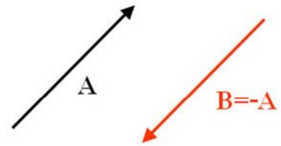
- การเท่ากันของเวกเตอร์

1.) ขนาดเท่ากัน 2.) ทิศทางเดียวกัน

เวกเตอร์สามารถย้ายไปยังที่ต่างๆ ได้ แต่ต้องมีขนาดและทิศทางเหมือนเดิม

- เวกเตอร์ทิศทางตรงข้าม

$\vec{c} = -\vec{a}$



- เวกเตอร์ขนาน

$\vec{a} // \vec{b}$
- ทิศทางเดียวกัน
- ทิศทางตรงข้ามกัน

ดังนั้น $\boxed{\vec{a} // -\vec{a}}$

2.2 พีชคณิตเวกเตอร์

2.2.1 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

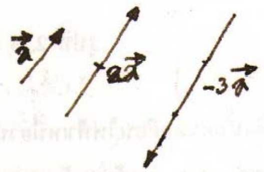
$\vec{a} \times m$

1.) $m\vec{a}$ ขนาด $|m|$ เท่าของ $|\vec{a}|$

2.) $m\vec{a}$ ทิศทางเดียวกับ $\vec{a}$ เมื่อ $m > 0$ (+)

ทิศทางตรงข้าม $\vec{a}$ เมื่อ $m < 0$ (−)

3.) $m\vec{a} = \vec{0}$ เมื่อ $m = 0$ หรือ $\vec{a} = 0$



กฎการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $\vec{a},\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์, m, n เป็นสเกลาร์

1.) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ กฎการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ

$\left.\begin{array}{l} \text{2.) } (m+n)\vec{a} = m\vec{a}+n\vec{a} \\ \text{3.) } m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a}+m\vec{b} \end{array}\right\}$ การแจกแจง

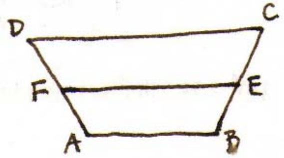
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

"เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย โดยไม่จำกัดจุดเริ่มต้นหรือทิศทางใดๆ"

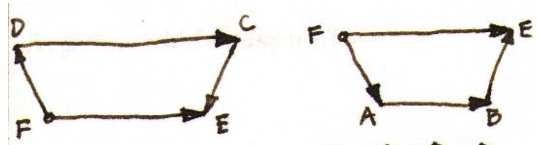
จุดเริ่มต้นหรือทิศ... เป็นคู่ขนาน

EX2.1 ABCD เป็น $\boxed{\text{ค}}$ ด้าน AB และ CD เป็นคู่ขนาน E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ DA จงแสดงว่า $\vec{FE} // \vec{AB}$ และ $\vec{FE} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{CD})$

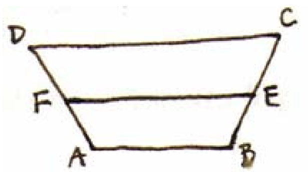
~~Sol~~



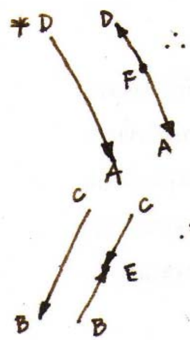
Sol แยกรูปออกเป็น 2 รูปและเขียนเป็นผลรวมเวกเตอร์



$\vec{FE} = \vec{FD}+\vec{DC}+\vec{CE}$ (1) $\quad \vec{FE} = \vec{FA}+\vec{AB}+\vec{BE}$ (2)



จากจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\vec{DA}$ และ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\vec{CB}$



$\therefore \vec{FD} = -\frac{1}{2}\vec{DA}$

$\vec{FA} = \frac{1}{2}\vec{DA}$

$\therefore \vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{CB}$

$\vec{BE} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$

(1)+(2)

$2\vec{FE} = \vec{FD}+\vec{DC}+\vec{CE}+\vec{FA}+\vec{AB}+\vec{BE}$

$2\vec{FE} = \vec{AB}+\vec{DC}+\frac{1}{2}\vec{DA}-\frac{1}{2}\vec{DA}+\frac{1}{2}\vec{CB}-\frac{1}{2}\vec{CB}$

$2\vec{FE} = \vec{AB}+\vec{DC}$

$\boxed{\therefore \vec{FE} = \frac{1}{2}\left[\vec{AB}+\vec{DC}\right]}$

[illegible] $|\vec{FE}| = \frac{1}{2}\left[|\vec{AB}|+|\vec{DC}|\right]$

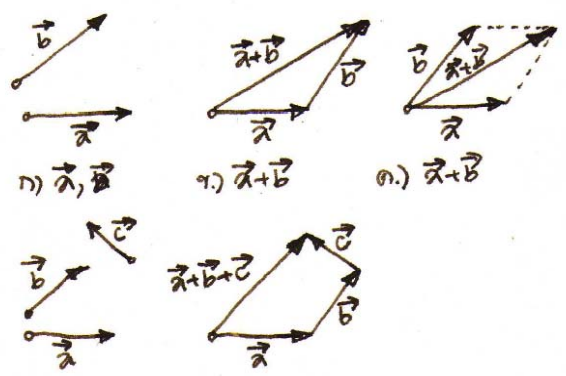
2.2.2 การบวกและการลบเวกเตอร์

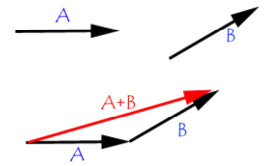
1.) การบวกเวกเตอร์ (Addition of Vectors)

$\vec{a}+\vec{b}$ ความหมายคือ

เวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{a}$ และมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{b}$ โดยจุดเริ่มต้นของ $\vec{b}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$

[ต้นหางปลาย]





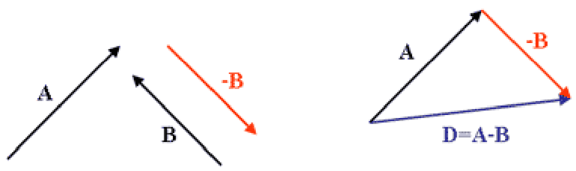
2.) การลบเวกเตอร์ (Subtraction of Vector) 0/2

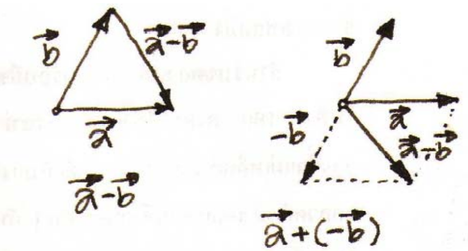
ผลต่างของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ → $\vec{a}-\vec{b}$

โดยมีนิยามดังนี้

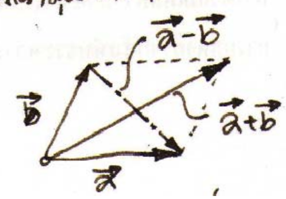
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีจุดเริ่มต้นร่วมกันแล้ว $\vec{a}-\vec{b}$ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{b}$ และมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{a}$





ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่จุดเริ่มต้น แล้วผลบวกและผลต่างของเวกเตอร์ทั้งสองจะแทนได้ด้วยเส้นทะแยงมุมทั้งสองของสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กฎต่างๆ ของการรวมเวกเตอร์

ถ้า $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์

1.) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ กฎการสลับที่การบวก

2.) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

3.) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$ เอกลักษณ์การบวก

4.) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=-\vec{a}+\vec{a}$ ตัวผกผันการบวก

Ex 2.2 ถ้า $\vec{A}=(1,1,1)$; $\vec{B}=(-2,3,0)$; $\vec{C}=(-10,10,-2)$

จงหา (ก) $3\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C}$ (ข.) $2\vec{A}-4\vec{B}+\vec{C}$

(ค) $|\vec{A}|\vec{B}+\frac{4}{|\vec{B}|}\vec{C}$

Sol^n (ก)

$$3\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C} = 3(1,1,1)+2(-2,3,0)-(-10,10-2)$$
$$= (3,3,3)+(-4,6,0)+(10,-10,+2)$$
$$= (9,-1,5)$$

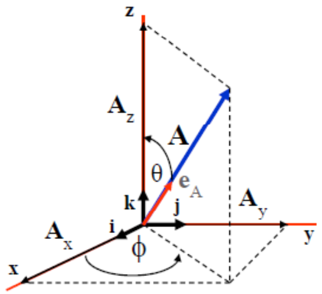
(ข) $$2\vec{A}-4\vec{B}+\vec{C} = 2(1,1,1)-4(-2,3,0)+(-10,10,-2)$$
$$= (2,2,2)+(8,-12,0)+(-10,10,-2)$$
$$= (0,0,0)$$

(ค) $$|\vec{A}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$$

$$\therefore |\vec{A}|\vec{B}+\frac{4}{|\vec{B}|}\vec{C} = \sqrt{3}(-2,3,0)+\frac{4}{\sqrt{13}}(-10,10,-2)$$
$$= (-2\sqrt{3},3\sqrt{3},0)+\left(-\frac{40}{\sqrt{13}},\frac{40}{\sqrt{13}},-\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$$
$$= \left(\left[-2\sqrt{3}-\frac{40}{\sqrt{13}}\right],\left[3\sqrt{3}+\frac{40}{\sqrt{13}}\right],\left[-\frac{8}{\sqrt{13}}\right]\right)$$

การแตกเวกเตอร์

เวกเตอร์ใดสามารถแตกเป็นองค์ประกอบที่ตั้งฉากกัน สำหรับระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียนจะได้ว่า



$$\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y} + \mathbf{A_z} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

จากรูปจะเห็นว่า

$$A_x = A\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = A\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = A\cos\theta$$

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ **A**

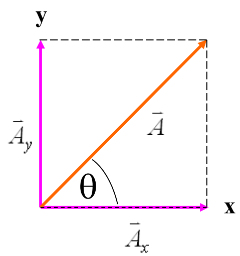
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

และมีเวกเตอร์หน่วย $\mathbf{e_A}$

$$\mathrm{e_A} = \sin\theta\cos\phi\,\mathrm{i} + \sin\theta\sin\phi\,\mathrm{j} + \cos\theta\,\mathrm{k}$$

1.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

การแยกเวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ใน 2 มิติ



เขียนเป็นสมการได้ว่า $\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$

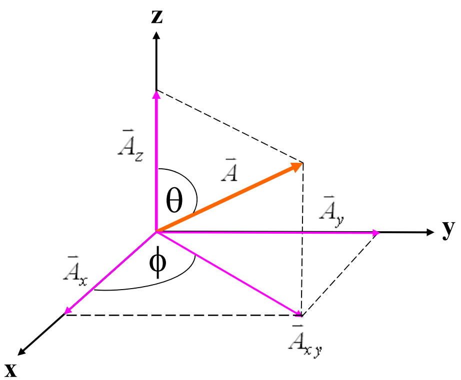
หรือ $\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

$\bar{A}_x$ **และ** $\bar{A}_y$ **เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ**

ของ $\bar{A}$ **ในแนวแกน x และ y**

$$A_y = A\sin\theta$$
$$A_x = A\cos\theta$$

การแยกเวกเตอร์องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ใน 3 มิติ



เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z$$

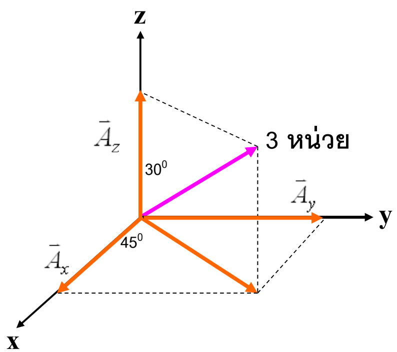
หรือ

$$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$A_x = A\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = A\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = A\cos\theta$$

$\bar{A}_x$, $\bar{A}_y$ **และ** $\bar{A}_z$ **เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบของ** $\bar{A}$ **ในแนวแกน x, y และ z**

ตัวอย่าง 1 **จงเขียนเวกเตอร์ A ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย**



$$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$A_x = A\sin\theta\cos\phi$$
$$A_y = A\sin\theta\sin\phi$$
$$A_z = A\cos\theta$$

A_x = 3sin30 cos45 หน่วย A_y = 3sin30 sin45 หน่วย A_z = 3cos30 หน่วย

= 3(1/2)(0.707) หน่วย   = 3(1/2)(0.707) หน่วย   = 3(0.866) หน่วย

$\therefore \bar{A} = 1.06\,\hat{i} + 1.06\,\hat{j} + 2.6\,\hat{k}$ หน่วย ANS

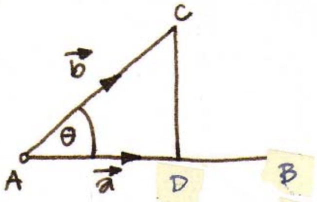
2.2.3 การคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์

การคูณได้ผลออกมา 2 แบบคือ

1.) ผลคูณสเกลาร์

2.) ผลคูณเวกเตอร์

1.) ผลคูณสเกลาร์ (Scalar product) หรือ ดอท (Dot product) หรือ อินเนอร์ (Inner)

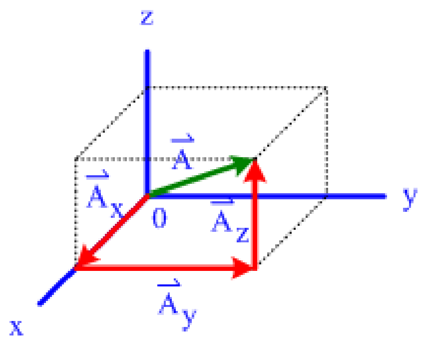


ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

ผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนเป็น $\vec{a}\cdot\vec{b}$

อ่านว่า $\vec{a}$ dot $\vec{b}$

* $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$



ผลที่ได้จะเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่ง $\vec{a}\cdot\vec{b}$ คือ

ผลคูณขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และเวกเตอร์ $\vec{b}$ คูณกับ

โคไซน์ (Cosine) ของมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

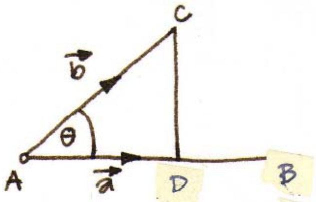
$$\therefore \boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

$\vec{a} = \vec{AB}$; $\vec{b} = \vec{AC}$

$|\vec{a}| = AB$; $|\vec{b}| = AC$

θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{AD}{AC}$$



จาก

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= (AB)(AC)\times\frac{AD}{AC}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (AB)(AD)$ เป็นปริมาณสเกลาร์

AD คือ สเกลาร์ orthogonal projection ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

คุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $m(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b})$
4. $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

   $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot i = 0$
5. ถ้า $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

   $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

6. ถ้า $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ เป็นปริมาณสเกลาร์
   1.) $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
   2.) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$
   3.) $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

๗. ขนาดของ $\vec{a}$ ใดๆ.

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$$

$|\vec{a}| = \sqrt{a\cdot a}$ ขนาดของ a ต้องเป็นบวกเสมอ.

EX2.4 กำหนดให้ $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{b} = 3i + 2j - \vec{k}$

ก) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ ข.) มุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

ค.) scalar orthogonal projection ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

Solⁿ (ก) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}$

(ข.) จาก $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})(3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$

$$= \frac{[(2\times3)+(-1\times2)+(3\times(-1))]}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$

$$= \frac{6-2-3}{14} = \frac{1}{14}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) = 85.904^\circ$$

ค.) scalar orthogonal projection ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

คือ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{a}$ กับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ของ $\vec{b}$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{j} = \vec{a}\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$= \frac{(6-2-3)}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

2. ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์

(Vector product หรือ Cross product)

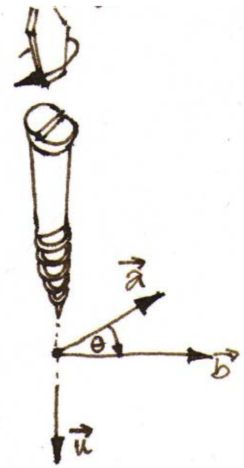
ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็น 2 เวกเตอร์ ครอสโปรดักของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ คือ $\vec{a}\times\vec{b}$ ⟶ $\vec{a}$ ครอส $\vec{b}$ จะได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ เรียกว่า เวกเตอร์ $\vec{c}$

โดย $\vec{c}$ จะมีขนาดเท่ากับผลคูณของขนาดของ $\vec{a}$ กับ $\vec{b}$ และค่าไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

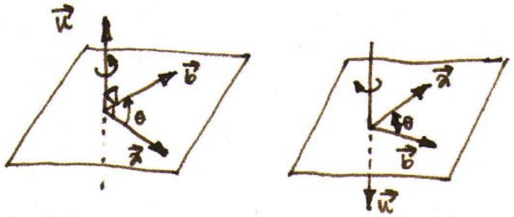
สำหรับทิศทางของ $\vec{c}$ จะมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \vec{u}\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta}$$

$\vec{u}$ คือ เป็นเวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบขึ้นจาก $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ โดยให้มีทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่ของสกรูเกลียวขวา ดังรูป เมื่อสกรูหมุนในแนวทิศทางการเคลื่อนที่จากปลายของ $\vec{a}$ ไปยังปลายของ $\vec{b}$

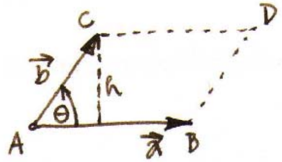


ผลของ $\vec{a}\times\vec{b}$



จากรูป ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นด้านประชิดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะพิสูจน์ได้ว่า พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีค่าเท่ากับ

$|\vec{a}\times\vec{b}|$ หรือ $|\vec{b}\times\vec{a}|$ ดังแสดงต่อไปนี้



จากรูปเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่ง พ.ท. คำนวณได้ดังนี้

พ.ท. สี่เหลี่ยม ABCD = (ฐาน) × (สูง)

$= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$\boxed{\therefore \text{ พ.ท. สี่เหลี่ยม ABCD} = |\vec{a}\times\vec{b}|}$

คุณสมบัติของผลคูณเวกเตอร์

1.) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

2.) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$

3.) $k(\vec{a}\times\vec{b}) = k\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times k\vec{b}$ k = scalar

4.) $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$

5.) $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{a}\times\vec{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$

ถ้าเขียนอยู่ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ 3x3 จะได้

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

6.) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

7.) ถ้า $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ โดย $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$

ดังนั้น $\sin\theta = 0$, ∴ $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec{u}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(0)\cdot\vec{u} = \vec{0}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ $(\bar{u}\times\bar{v})$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ **คือ** ผลคูณของเวกเตอร์ซึ่งได้ค่าออกมาเป็นเวกเตอร์

ให้

$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

$\bar{v} = d\bar{i} + e\bar{j} + f\bar{k}$

จะได้

$$-(db\bar{k} + ec\bar{i} + fa\bar{j}) = -db\bar{k} - ec\bar{i} - fa\bar{j}$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & \bar{i} & \bar{j} \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}\right|$$

$$bf\bar{i} + cd\bar{j} + ae\bar{k}$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = (bf - ec)\bar{i} + (cd - fa)\bar{j} + (ae - db)\bar{k}$$

3/5

Ex2.4 ถ้า $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

ให้หา (ก) $\vec{a}\times\vec{b}$ (ข) $\vec{b}\times\vec{a}$ (ค) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$

(ก.) $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & +4 & -2 & 1 & +4 \end{array}\right|$$

$$= (-3)(-2)\vec{i} + (-1)(1)\vec{j} + (2)(+4)\vec{k}$$

$$-(1)(-3)\vec{k} - (+4)(-1)\vec{i} - (-2)(2)\vec{j}$$

$$= 6\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k} + 3\vec{k} + 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k}}$$

(ข) จาก $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$\therefore \vec{b}\times\vec{a} = -(10\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k})$

$$\boxed{\vec{b}\times\vec{a} = -10\vec{i} - 3\vec{j} - 11\vec{k}}$$

(ค.) $\vec{a}+\vec{b} = [2+1]i + [-3+4]j + [-1-2]\vec{k}$

$\vec{a}+\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{a}-\vec{b} = [2-1]\vec{i} + [-3-4]\vec{j} + [-1-(-2)]\vec{k}$

$\vec{a}-\vec{b} = \vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 3 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 1 & 1 & -7 \end{array}\right|$$

$$= (1)(1)\vec{i} + (-3)(1)\vec{j} + (3)(-7)\vec{k} - (1)(1)\vec{k} - (-7)(-3)\vec{i} - (1)(3)\vec{j}$$

$$= \vec{i} - 3\vec{j} - 21\vec{k} - \vec{k} - 21\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$= -20\vec{i} - 6\vec{j} - 22\vec{k}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

sol^n เวกเตอร์ที่จะตั้งฉากทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ คือผลของ $\vec{a} \times \vec{b}$

ซึ่ง [illegible] หนึ่ง

และสิ่งที่ต้องการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ก็หาขนาดไป

$$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b}$$

ดังนั้น $\vec{u}_c = \dfrac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$

$$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

$$= (1)(1)\vec{i} + (1)(2)\vec{j} + (-1)(-1)\vec{k} - (2)(1)\vec{k} - (-1)(1)\vec{i} - (1)(-1)\vec{j}$$

$$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{k} + \vec{i} + \vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$|\vec{C}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\therefore \boxed{\vec{u}_c = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{14}}}$$

3. ผลคูณของเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ (Triple Product)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณมี 3 แบบคือ

1.) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \rightsquigarrow$ scalar

2.) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \rightsquigarrow$ Vector

3.) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \rightsquigarrow$ Vector

คุณสมบัติของ Triple product

1.) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$

2.) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c})$

3.) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{0} \times \vec{c} = 0$

4.) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

5.) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

และ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

ตัวอย่าง 2.6 หา θ, $\vec{a} = 3\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$

$\vec{b} = 4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$

จาก $\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos\theta$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}$$

$$= \frac{(3\times4)+(2\times(-3))+(-6(1))}{\left(\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-6)^2}\right)\left(\sqrt{(4)^2+(-3)^2+(1)^2}\right)}$$

$$= \frac{12-6-6}{\sqrt{49}\sqrt{26}} = 0$$

$$\therefore \quad \cos\theta = 0$$

$$\theta = \cancel{0^\circ}\ \frac{\pi}{2}$$

แบบฝึกหัด

1.) $\vec{a} = \vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$

$\vec{b} = -2\vec{i}+4\vec{k}$

จงคำนวณหา

(ก) $3\vec{a}-2\vec{b}$ (ข) $2\vec{c}+3\vec{b}$

(ค) $\vec{c}-3\vec{a}-3\vec{b}$ (ง) $2\vec{c}-3\vec{b}$

(จ) $|\vec{b}|\vec{b}-2|\vec{b}|\vec{c}$ (ฉ) $(15-2|\vec{c}|)(\vec{a}+\vec{b})$

2.) จงหา θ ถ้า $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

3.) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{c}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$

จงคำนวณหา.

(ก) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (ข) $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{A}$ (ค) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot\vec{c}$

(ง) $2\vec{i}\cdot\vec{a}$ (จ) $|2\vec{a}|\vec{b}\cdot\vec{c}$

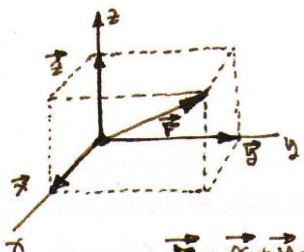
4.) $\vec{a}=(2,-1,3)$; $\vec{b}=(0,1,7)$; $\vec{c}=(1,4,5)$

(ก) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ (ข) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

(ค) $\vec{a}\times(\vec{b}-2\vec{c})$ (ง) $(\vec{a}\times\vec{b})-2\vec{c}$

ส่วนประกอบเวกเตอร์ (Vector component) และ

เวกเตอร์หน่วย (Unit vector)



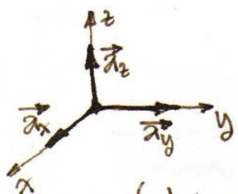
$$\vec{r} = \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$$

เวกเตอร์ $\vec{r}$ ลากจากจุดเริ่ม 0 ไปยัง $P(x, y, z)$ ซึ่งมีชื่อเรียกว่า เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (Position Vector) มีนิพจน์เป็น

$$\vec{r} = \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$$

ซึ่ง เวกเตอร์ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ เป็น<u>ส่วนประกอบชนิดเวกเตอร์</u> ของ $\vec{r}$ ถ้าให้

$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ แทน เวกเตอร์หน่วยในแนวแกน x, y, z ดังรูป



เวกเตอร์หน่วยตามแนวแกน

นิยามของเวกเตอร์หน่วย คือ

"เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และมีทิศตามแนวแกน +x, +y, +z ตามลำดับ"

ดังนั้น

$$\vec{x} = x\vec{a}_x \;;\; \vec{y} = y\vec{a}_y \;;\; \vec{z} = z\vec{a}_z$$

และ

$$\vec{a}_x = \frac{\vec{x}}{x} \;;\; \vec{a}_y = \frac{\vec{y}}{y} \;;\; \vec{a}_z = \frac{\vec{z}}{z}$$

เมื่อ x, y, z เป็นค่าโคออร์ดิเนตของจุดปลายของ $\vec{r}$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{F}$ ใดๆ จะได้

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\vec{a}_x + F_y\vec{a}_y + F_z\vec{a}_z}$$

เมื่อ $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ เป็นส่วนประกอบเวกเตอร์ของ $\vec{F}$

และ F_x, F_y, F_z เป็นส่วนประกอบชนิดสเกลาร์ ของ $\vec{F}$

เรียกสั้นๆ ว่า "ส่วนประกอบ"

- ขนาด (Magnitude) หรือค่าสัมบูรณ์ (Absolute) ของ $\vec{F}$

$$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

- เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวทิศทางของ $\vec{F}$ คือ

$$\boxed{\vec{a}_F = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{F_x\vec{a}_x + F_y\vec{a}_y + F_z\vec{a}_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}}$$

โดย $\vec{a}_x = \vec{i}$

$\vec{a}_y = \vec{j}$

$\vec{a}_z = \vec{k}$