Lesson 4

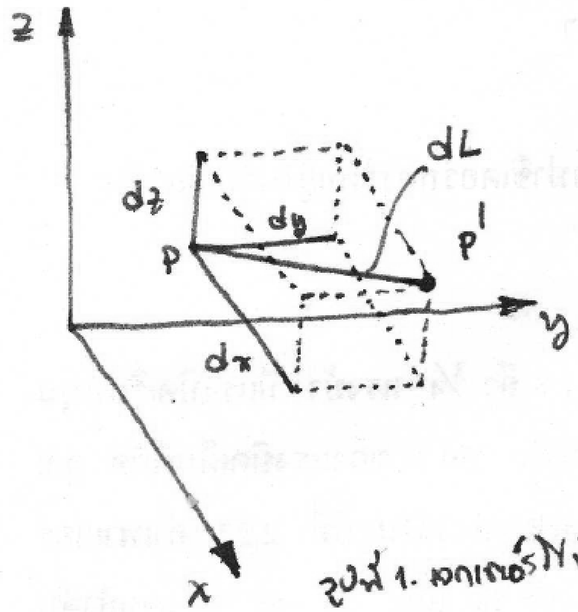
LOGO

เวกเตอร์

เวกเตอร์ ในระบบโคออร์ดิเนทต่างๆ.

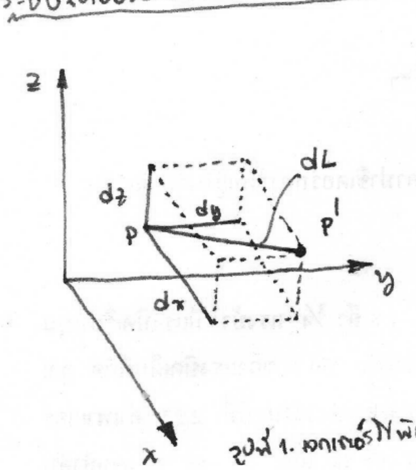
- ระบบโคออร์ดิเนตสี่เหลี่ยมผืนผ้า
  (Rectangular Coordinate)
- ระบบโคออร์ดิเนตทรงกระบอก
  (Cylindrical Coordinate)
- ระบบโคออร์ดิเนตทรงกลม
  (Spherical Coordinate)

1.) ระบบโคออร์ดิเนตสี่เหลี่ยมฉาก



รูปที่ 1. เวกเตอร์พิกัดฉาก

1.) ระบบโคออร์ดิเนตสี่เหลี่ยมฉาก



รูปที่ 1. เวกเตอร์พิกัดฉาก

- ระยะทางดิฟเฟอร์เรนเชียลตามแนวแกน คือ

dx, dy, dz

- พื้นที่ดิฟเฟอร์เรนเชียล (ds) คือ
  - $dx \cdot dy$
  - $dy \cdot dz$
  - $dz \cdot dx$
- ปริมาตรดิฟเฟอร์เรนเชียล (dv) คือ

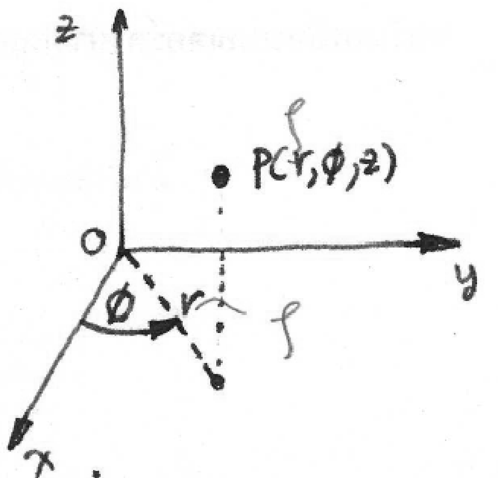
$dx \cdot dy \cdot dz$

- ระยะทางดิฟเฟอร์เรนเชียล dL จาก $p \rightarrow p'$ คือ

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

2. ระบบโคออร์ดิเนตทรงกระบอก

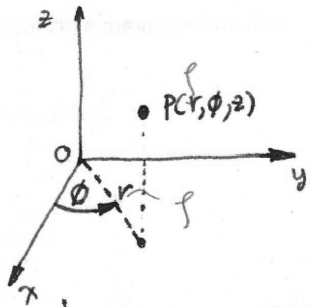
ระบบนี้เป็นผลมาจากระบบโคออร์ดิเนตเชิงขั้ว (Polar coordinate) ดังรูป.



รูปที่ 2 รูปพิกัดในระบบทรงกระบอก

2. ระบบโคออร์ดิเนตทรงกระบอก

ระบบนี้เป็นผลมาจากระบบโคออร์ดิเนตเชิงขั้ว (Polar coordinate) ดังรูป.

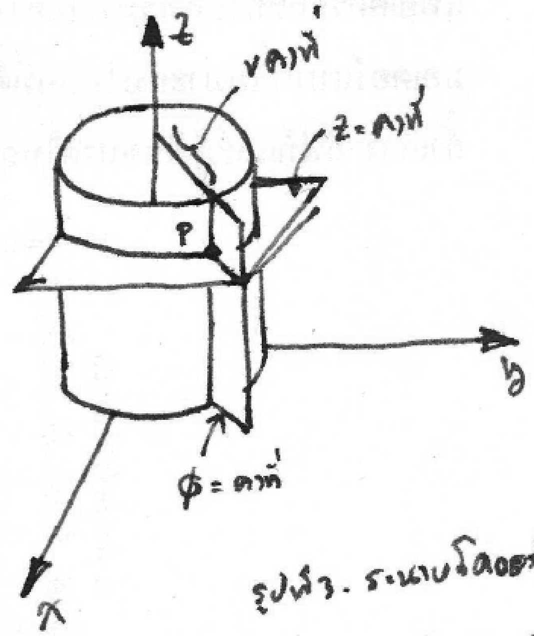


รูปที่ 2 รูปพิกัดในระบบทรงกระบอก

r คือ ระยะทางที่วัดจากจุดเริ่มแกนขนานกับระนาบ xy ไปยังจุดฉายของ P บนระนาบ xy

ϕ คือ มุมที่วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x (ตำแหน่งที่ $\phi=0$) ไปยังแนวของ r

z คือ ระยะทางที่วัดจากระนาบ xy ขนานกับแกน z ไปยังจุด $P(r, \phi, z)$

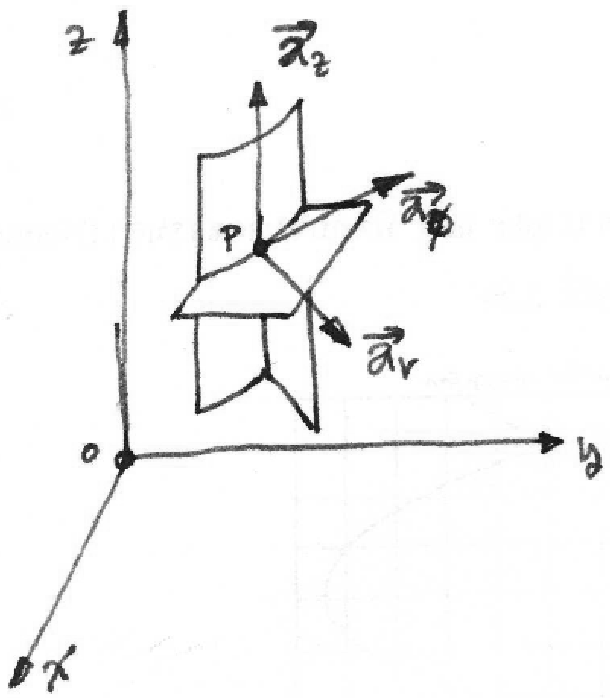


รูปที่ 3. ระนาบโคออร์ดิเนท

ถ้าให้ $\vec{a}_r$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ r

$\vec{a}_\phi$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ ϕ

$\vec{a}_z$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง z



รูปที่ 4. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางต่างๆ.

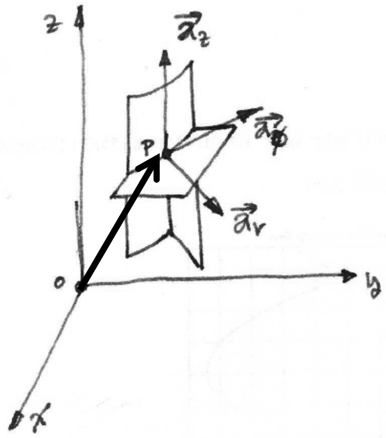
* <u>เวกเตอร์และปริมาณดิฟเฟอเรนเชียลพิกัด</u>
<u>ทรงกระบอก</u>

- เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (รูปที่ 2 และรูปที่ 4)

$$\boxed{\vec{OP} = r\vec{a}_r + z\vec{a}_z}$$

- เวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ

$$\boxed{\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\phi\vec{a}_\phi + A_z\vec{a}_z}$$



รูปที่ 4 เวกเตอร์หน่วยในทิศทางต่างๆ

- ผลคูณดอท และ ครอส คือ

$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = 1$; $\vec{a}_r \cdot \vec{a}_\phi = 0$,
$\vec{a}_r \times \vec{a}_r = \vec{0}$; $\vec{a}_r \times \vec{a}_\phi = \vec{a}_z$

- ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ประกอบด้วยส่วนประกอบ 3 ส่วน ในแนวแกน
เวกเตอร์หน่วยชุดเดียวกัน จะได้

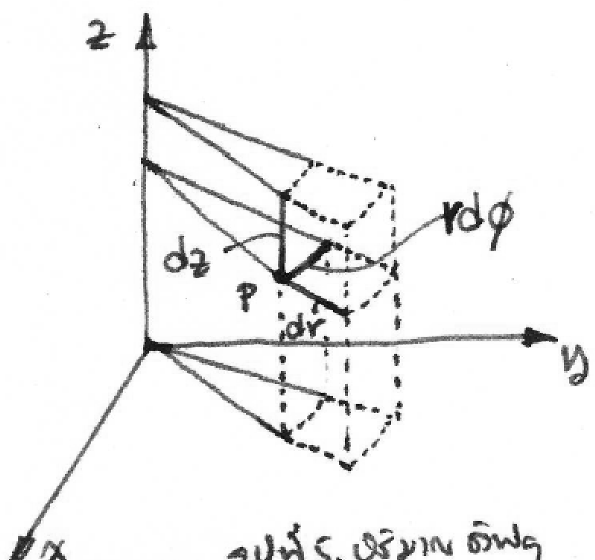
$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z}$$

- $\vec{A} \times \vec{B} = (A_\phi B_z - A_z B_\phi)\vec{a}_r + (A_z B_r - A_r B_z)\vec{a}_\phi$
$+ (A_r B_\phi - A_\phi B_r)\vec{a}_z$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & \vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ A_r & A_\phi & A_z \\ B_r & B_\phi & B_z \end{vmatrix}$$

- ปริมาณดิฟเฟอร์เรนเชียล

แสดงดังรูปที่ 5.



รูปที่ 5. ปริมาณ ดิฟฯ

ความยาวดิฟเฟอร์เรนเชียล คือ

$$dr, rd\phi, dz$$

พื้นที่ดิฟเฟอร์เรนเชียล คือ.

- $rdrd\phi$
- $drdz$
- $rd\phi dz$

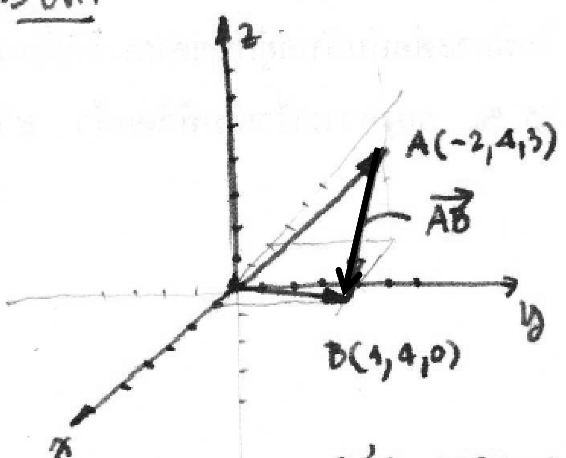
ปริมาตรดิฟเฟอร์เรนเชียล คือ

$$rdrd\phi dz$$

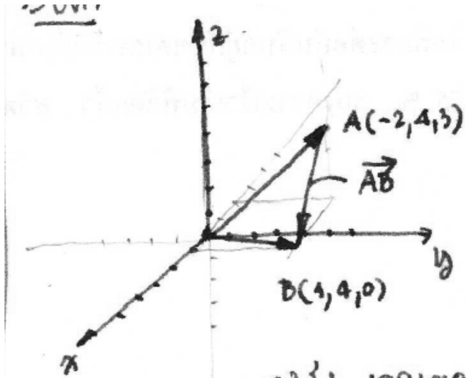
ตัวอย่าง 4.1 ถ้า $A(-2,4,3)$; $B(1,4,0)$ $C(1,2,3)$ และ $D(-3,6,-4)$ ระบบพิกัดฉาก

ก.) เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ข.) เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ตามแนว $\overrightarrow{CD}$

วิธีทำ



รูปที่ 6 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$



รูปที่ 6 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

ก.) $\vec{OA} = -2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k} \longrightarrow -2\vec{a}_x+4\vec{a}_y+3\vec{a}_z$

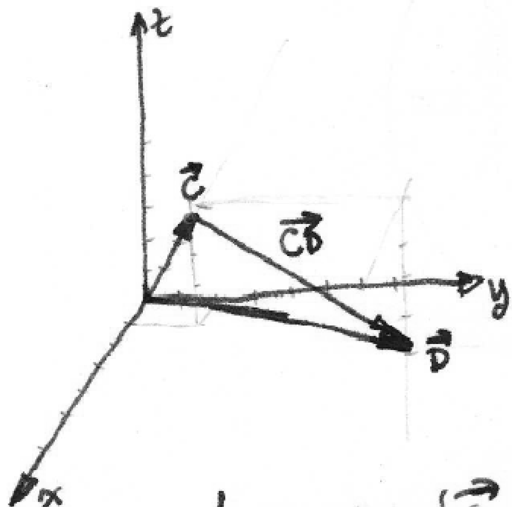
$\vec{OB} = \vec{i}+4\vec{j}+0\vec{k} \longrightarrow \vec{a}_x+4\vec{a}_y+0\vec{a}_z$

จากรูปที่ 6 เวกเตอร์ $\vec{AB}$ คือ $\vec{OB}-\vec{OA}$

ดังนั้น $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA} = (1-(-2))\vec{a}_x+(4-4)\vec{a}_y+(0-3)\vec{a}_z$

$= 3\vec{a}_x-3\vec{a}_z$

ข.)



รูปที่ 7. เวกเตอร์ $\vec{C}$ และ $\vec{D}$

$\vec{OC} = \vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k} \longrightarrow \vec{a}_x+2\vec{a}_y+3\vec{a}_z$

$\vec{OD} = -3\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k} \longrightarrow -3\vec{a}_x+6\vec{a}_y-4\vec{a}_z$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = (-3-1)\vec{a}_x + (6-2)\vec{a}_y + (-4-3)\vec{a}_z$$

$$\vec{CD} = -4\vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 7\vec{a}_z$$

หา $\vec{a}_{CD} = \dfrac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$\boxed{\therefore \vec{a}_{CD} = \frac{-4\vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 7\vec{a}_z}{9}}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 สนามเวกเตอร์ความเร็วมีค่า

$$\vec{v} = 2y\vec{a}_x - (2x-3z-3)\vec{a}_y - (3y+1)\vec{a}_z \text{ m/s}$$

จงหาค่าของ (ก) ขนาดของความเร็วที่ $\vec{v}$ ที่ $P(2,1,-1)$

(ข) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่บอกทิศทางของ $\vec{v}$ ที่จุด $P(2,1,-1)$

Sol^n ที่จุด $P(2,1,-1)$; $x=2,\ y=1,\ z=-1$

$$\therefore \vec{v} = 2(1)\vec{a}_x - (2(2)-3(-1)-3)\vec{a}_y - (3(1)+1)\vec{a}_z$$

$$\vec{v} = 2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$$

หา $\vec{a}_u = \dfrac{\vec{U}}{|\vec{U}|}$

(ก.)

$$|\vec{U}| = \sqrt{(2)^2+(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ m/s}$$

(ข)

$$\vec{a}_u = \frac{2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y - 4\vec{a}_z}{6}$$

EX A.3 จงหาระยะห่างระหว่างจุด $P(10, 90^\circ, 5)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก กับจุดต่างๆ ต่อไปนี้ ในระบบเดียวกัน

180°

(ก.) $A(15, 90^\circ, 5)$

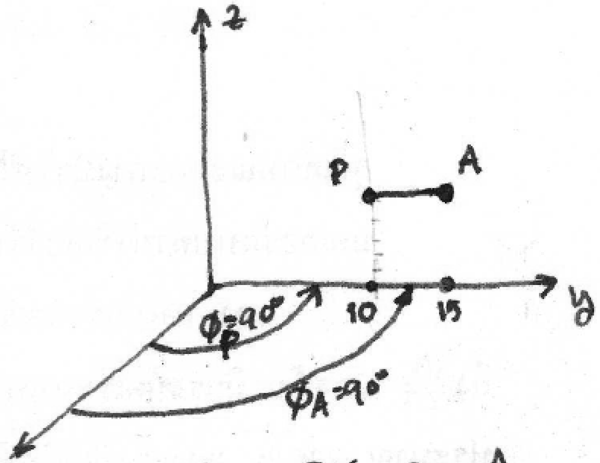
(ข) $B(10, 270^\circ, 5)$

(ค) $C(10, 90^\circ, 15)$

(ง) $D(0, 12.6^\circ, 4.83)$

(จ) $E(10, 0^\circ, 0)$

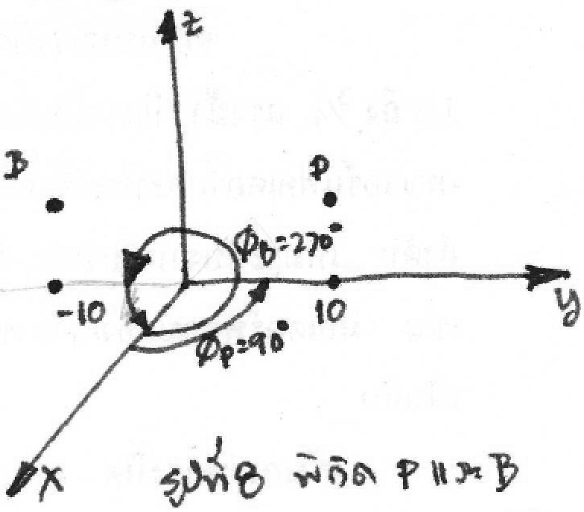
วิธีทำ (ก.) $A(15, 90°, 5)$; $P(10, 90°, 5)$



รูปที่ 7 พิกัด P และ A

$\therefore |\overrightarrow{PA}| = 15 - 10 = 5$ (อยู่ในระนาบ yz)

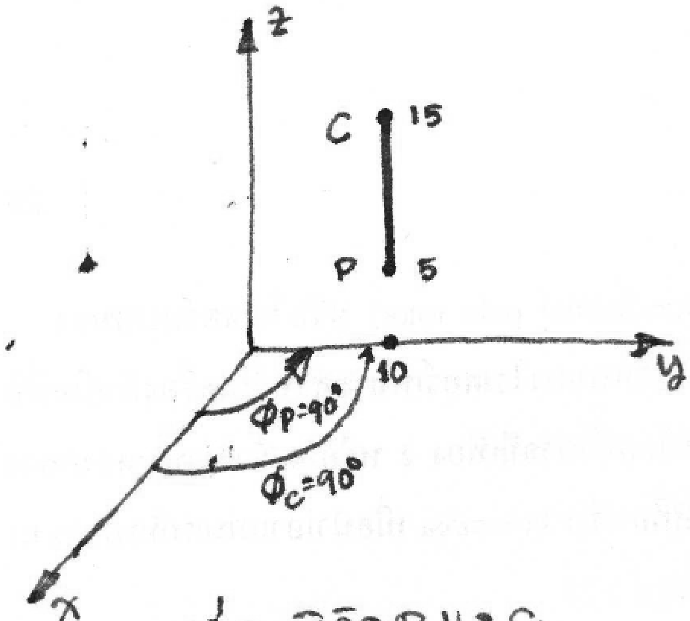
(ข) $P(10, 90°, 5)$; $B(10, 270°, 5)$



รูปที่ 8 พิกัด P และ B

$|\overrightarrow{PB}| = 10 - (-10) = 20$ (อยู่ในระนาบ yz)

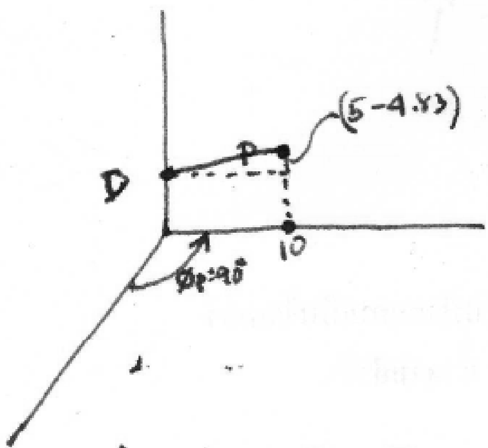
(ค.) $P(10, 90^\circ, 5)$; $C(10, 90^\circ, 15)$



รูปที่8. พิกัด P และ C

$|\overrightarrow{PC}| = 15 - 5 = 10.$

(ง) $P(10, 90^\circ, 5)$; $D(0, 12.6^\circ, 4.83)$



รูปที่ 9. พิกัด P และ D

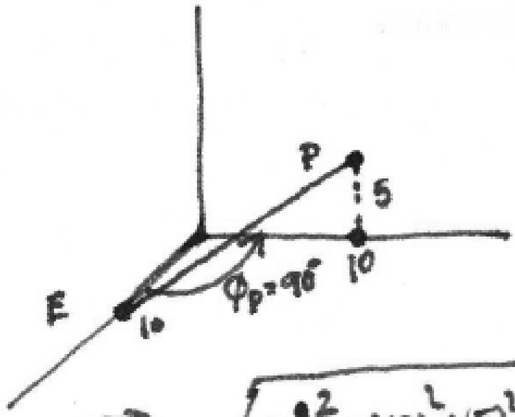
จาก รูปที่ 9. พิกัดของ $D(0, 12.6^\circ, 4.83)$

เพราะ $r_D = 0$; $z = 4.83$ เป็นตำแหน่งอยู่บนแกน z

และไม่สนใจ ϕ จะเป็นเท่าไร.

$\therefore |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{(10)^2 + (5-4.83)^2} = 10.014$

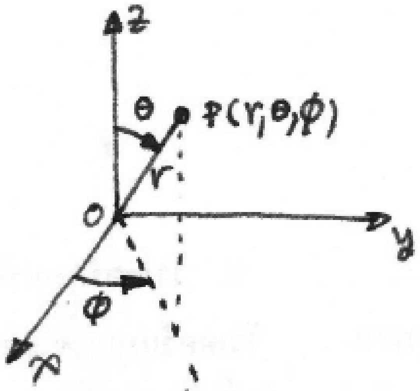
(9) $P(10, 90^\circ, 5)$; $E(10, 0^\circ, 0)$



รูปที่ 10 พิกัด P, E

$$|\vec{PE}| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2 + (5)^2} = 15$$

<u>ระบบพิกัดทรงกลม</u> (Spherical Coordinate)



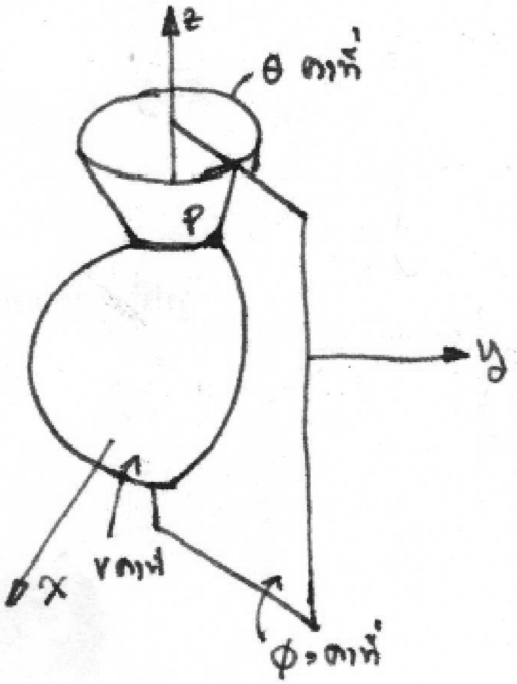
รูปที่ 11 พิกัดทรงกลม

r = ระยะทางจากจุดเริ่มต้นไปยังจุด $P(r, \theta, \phi)$

θ = มุมที่วัดจากแกน z ไปยังเส้นตรง OP → latitude

ϕ = มุมที่วัดจากแกน x ไปยังส่วนฉายของ OP บนระนาบ xy → ~~long~~ longtitude

เวกเตอร์และปริมาณเวกเตอร์



รูปที่ 12 ระบบพิกัด

รูปที่ 13 เวกเตอร์หน่วย

ผลคูณดอทและครอส

$$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_r = 1, \quad \vec{a}_r \cdot \vec{a}_\theta = 0;$$

$$\vec{a}_r \times \vec{a}_r = 0, \quad \vec{a}_r \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_\phi$$

เมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ประกอบด้วยส่วนประกอบ 3 ส่วน ในแนวเวกเตอร์หน่วยชุดเดียวกัน จะได้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta)\vec{a}_r + (A_\phi B_r - A_r B_\phi)\vec{a}_\theta$$

$$(A_r B_\theta - A_\theta B_r)\vec{a}_\phi$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & \vec{a}_\theta & \vec{a}_\phi \\ A_r & A_\theta & A_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix}$$

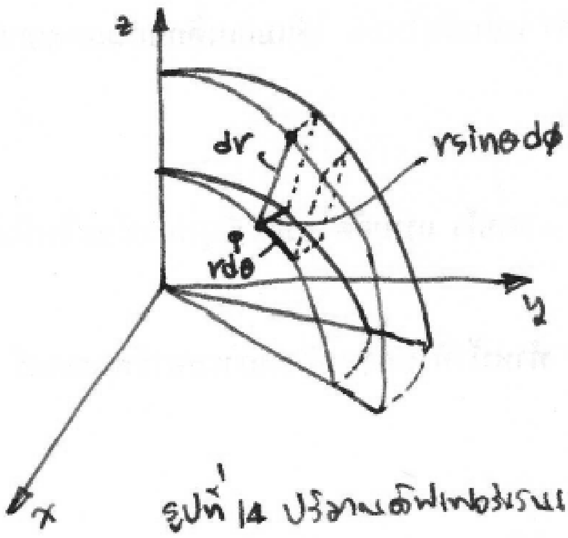
เวกเตอร์บอกตำแหน่ง

$$\vec{OP} = r\vec{a}_r$$

เวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ.

$$\boxed{\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi}$$

- ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล

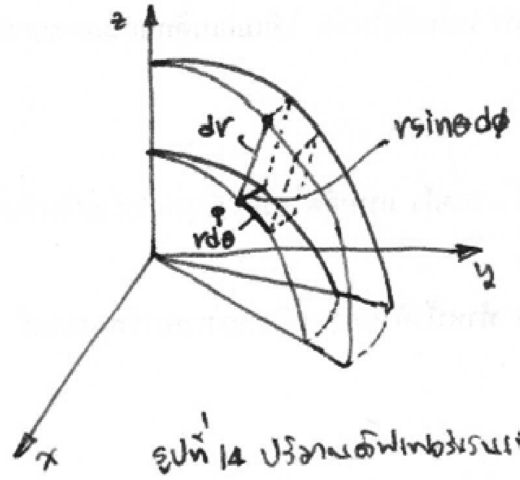


รูปที่ 14 ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล

- ความยาวดิฟเฟอเรนเชียล

$$dr, \; rd\theta, \; r\sin\theta\, d\phi$$

- ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล



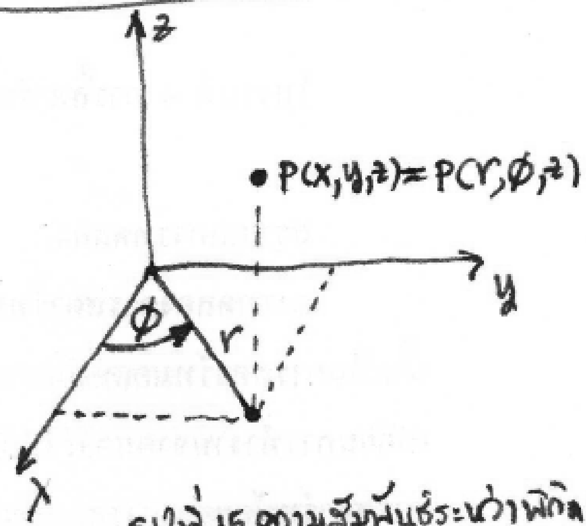
รูปที่ 14 ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล

- พื้นที่ดิฟเฟอเรนเชียล
  - $r\,dr\,d\theta$
  - $r\sin\theta\,dr\,d\phi$
  - $r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$
- ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล

$$r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

- การแปลงตัวแปรและเวกเตอร์ระหว่างพิกัด 2 ระบบ

ระบบคาร์ทีเซียน ⇔ ทรงกระบอก



รูปที่ 15 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียนกับพิกัดทรงกระบอก

จากรูปที่ 15 จะได้

คาร์ทีเซียน → ทรงกระบอก

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad ; \quad z=z}$$

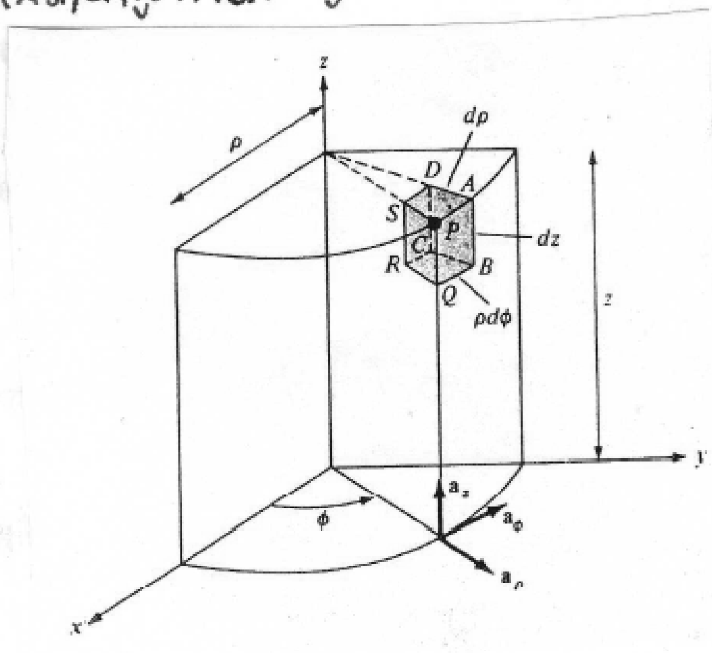
หรือจะได้

ทรงกระบอก → คาร์ทีเซียน

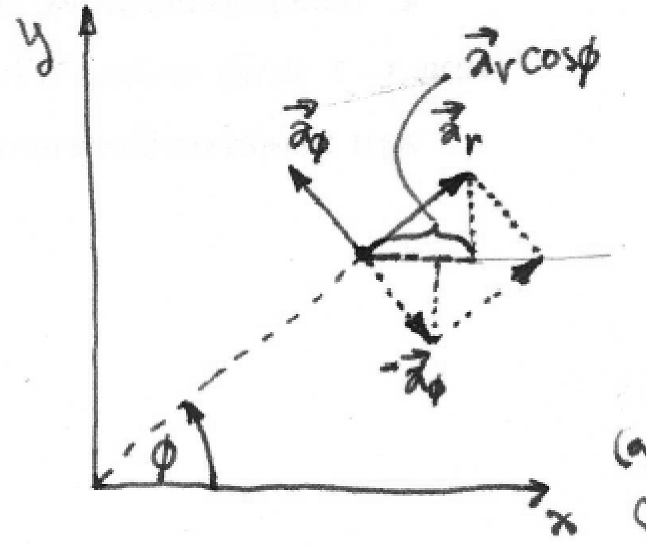
$$\boxed{x=r\cos\phi \quad ; \quad y=r\sin\phi \quad ; \quad z=z}$$

ความสัมพันธ์ของ (a_x, a_y, a_z) กับ (a_r, a_ϕ, a_z)

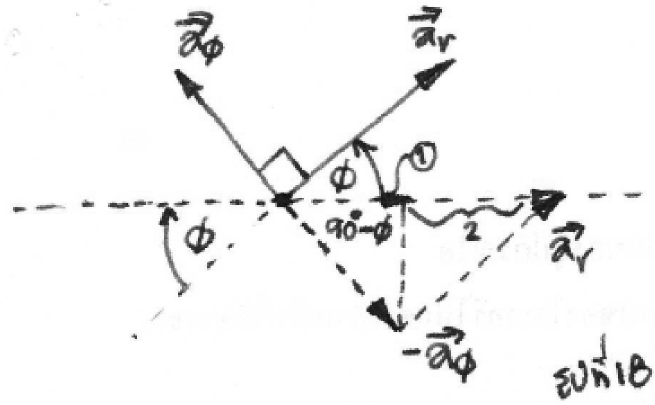
แสดงดังรูปที่ 16 และรูปที่ 17.



รูปที่ 16 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยระบบทรงกระบอก.



รูปที่ 17
ความสัมพันธ์ระหว่าง
(a_x, a_y, a_z) กับ
(a_r, a_ϕ, a_z)



รูปที่ 18

ทิศทางหา $\vec{a}_x$ คือ $\vec{a}_r + (-\vec{a}_\phi)$

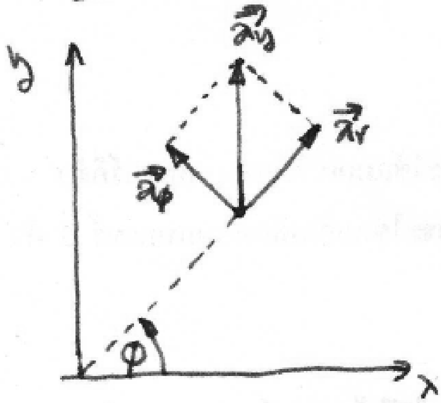
เวกเตอร์ ① คือ $-\vec{a}_\phi \cos(90^\circ-\phi)$

จาก $\cos(90^\circ \pm A) = \mp \sin A$

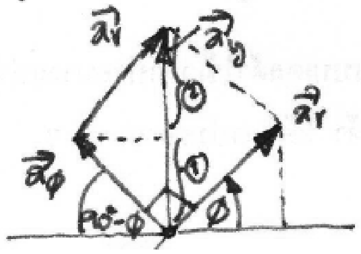
$$\boxed{\therefore -\vec{a}_\phi \cos(90^\circ-\phi) = -\vec{a}_\phi \sin\phi}$$

เวกเตอร์ ② คือ $\vec{a}_r\cos\phi$

$$\therefore \boxed{\vec{a}_x = \vec{a}_r\cos\phi - \vec{a}_\phi\sin\phi}$$



รูปที่ 18 การหา $\vec{a}_y$ จาก $\vec{a}_r$ และ $\vec{a}_\phi$



รูปที่ 19

หา $\vec{a}_y = \vec{a}_r + \vec{a}_\phi$

เวกเตอร์ ① $= \vec{a}_\phi \sin(90^\circ-\phi)$

จาก $\sin(90^\circ \pm A) = \cos A$

$$\therefore \vec{a}_\phi \sin(90^\circ - A) = \vec{a}_\phi\cos\phi$$

เวกเตอร์ ② $= \vec{a}_r\sin\phi$

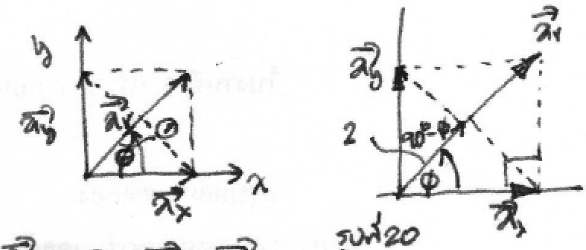
$$\therefore \vec{a}_y = \vec{a}_\phi\cos\phi + \vec{a}_r\sin\phi$$

ดังนั้นจะได้ว่า 4/6

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_x &= \vec{a}_r\cos\phi - \vec{a}_\phi\sin\phi \\ \vec{a}_y &= \vec{a}_r\sin\phi + \vec{a}_\phi\cos\phi \\ \vec{a}_z &= \vec{a}_z \end{aligned}}$$

จากทรงกระบอก เป็นคาร์ทีเซียน

<u>เวกเตอร์หน่วยในพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นทรงกระบอก</u>



รูปที่ 20

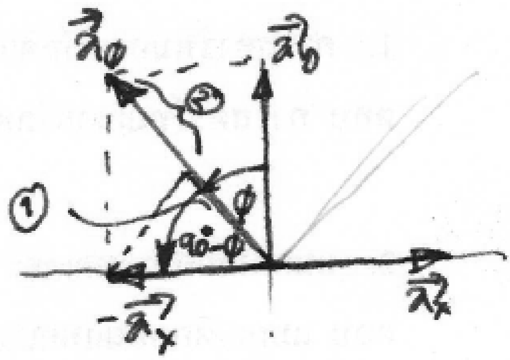
$$\vec{a}_r = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

เวกเตอร์ ① $= \vec{a}_x\cos\phi$

เวกเตอร์ ② $= \vec{a}_y\cos(90°-\phi)$

$\therefore \vec{a}_y\cos(90°-\phi) = \vec{a}_y\sin\phi$

$$\therefore \boxed{\vec{a}_r = \vec{a}_x\cos\phi + \vec{a}_y\sin\phi}$$



รูปที่ 21

$$\vec{a}_\phi = -\vec{a}_x + \vec{a}_y$$

เวกเตอร์ ① $= -\vec{a}_x \cos(90^\circ - \phi)$

$$\therefore -\vec{a}_x \cos(90^\circ - \phi) = -\vec{a}_x \sin\phi$$

เวกเตอร์ ② $= \vec{a}_y \cos\phi$

$$\therefore \vec{a}_\phi =$$

$$\vec{a}_\phi = -\vec{a}_x \sin\phi + \vec{a}_y \cos\phi$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_r &= \vec{a}_x \cos\phi + \vec{a}_y \sin\phi \\ \vec{a}_\phi &= -\vec{a}_x \sin\phi + \vec{a}_y \cos\phi \\ \vec{a}_z &= \vec{a}_z \end{aligned}}$$

ตามคาร์ทีเซียน เป็นทรงกระบอก.

จากเวกเตอร์ในระบบคาร์ทีเซียน

$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

แปลงระบบทรงกระบอก.

$$\therefore \vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z$$

ตัวนั้นแทน $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ ซึ่งเทอมของ $\vec{a}_r, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ ได้เป็น

$$\vec{A} = A_x(\vec{a}_r \cos\phi - \vec{a}_\phi \sin\phi) + A_y(\vec{a}_r \sin\phi + \vec{a}_\phi \cos\phi) + A_z \vec{a}_z$$

$$\therefore \vec{A} = \underbrace{[A_x \cos\phi + A_y \sin\phi]}_{A_r} \vec{a}_r + \underbrace{[-A_x \sin\phi + A_y \cos\phi]}_{A_\phi} \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} A_r &= A_x \cos\phi + A_y \sin\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \\ A_z &= A_z \end{aligned}}$$

คาร์ทีเซียน เป็น ทรงกระบอก

แทน $\vec{a}_r, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ ในเทอมของ $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$

$$\vec{A} = A_r[\vec{a}_x\cos\phi + \vec{a}_y\sin\phi] + A_\phi[-\vec{a}_x\sin\phi + \vec{a}_y\cos\phi] + A_z\vec{a}_z$$

$$\vec{A} = \underbrace{[A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi]}_{A_x}\vec{a}_x + \underbrace{[A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi]}_{A_y}\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi \\ A_y &= A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi \\ A_z &= A_z \end{aligned}}$$

ทรงกระบอก
เป็น
คาร์ทีเซียน

การแปลงเวกเตอร์ $\vec{A}$ จาก (A_x, A_y, A_z) เป็น (A_r, A_ϕ, A_z)
เขียนในรูปแมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$(A_r, A_\phi, A_z) \longrightarrow (A_x, A_y, A_z)$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

จาก $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$; $z = z$

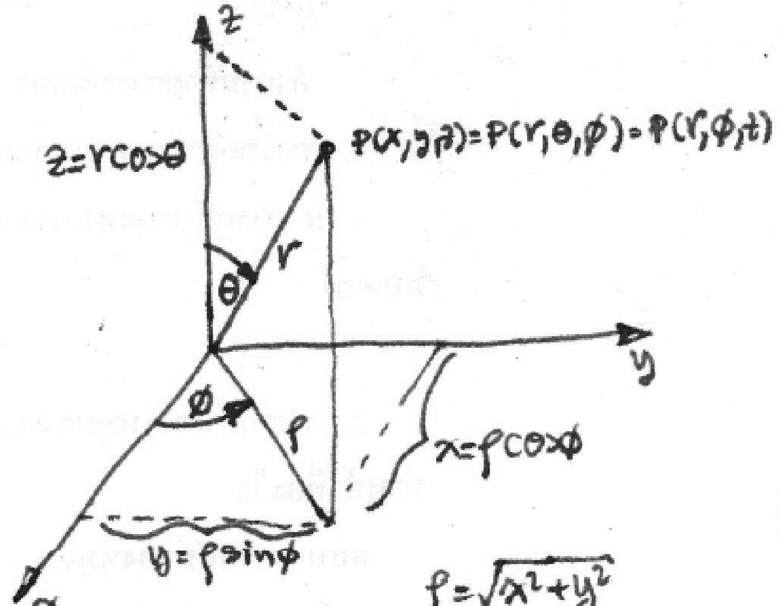
$$\therefore \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

- ระบบคาร์ทีเซียนกับทรงกลม



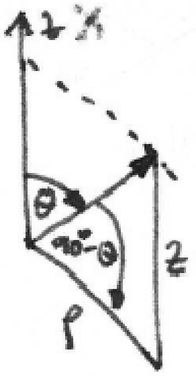
รูปที่ 2.6

ระบบคาร์ทีเซียน $(x, y, z) \longrightarrow$ ทรงกลม (r, θ, ϕ) จะได้

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

~~tanθ~~

จากรูป.



รูปที่ 2.7

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{z}{\rho}$$

จาก $\tan(90^\circ\pm\theta)=\pm\cot\theta$

$$\therefore \cot\theta=\frac{z}{\rho}$$

และ $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$

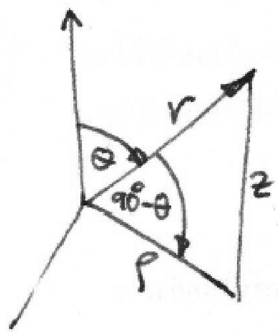
$$\tan\theta=\frac{\rho}{z}$$

$$\therefore \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \;;\; \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

∴ คาร์ทีเซียนเป็นทรงกลม

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;;\;\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\;;\;\phi=\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

ทรงกลมเป็นคาร์ทีเซียน

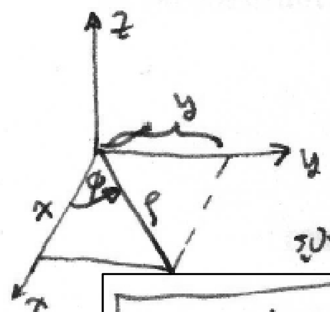


$$\rho=r\cos(90^\circ-\theta)$$

$$\therefore \rho=r\sin\theta$$

$$z=r\sin(90^\circ-\theta)$$

$$z=r\cos\theta$$



$$x=\rho\cos\phi$$

$$y=\rho\sin\phi$$

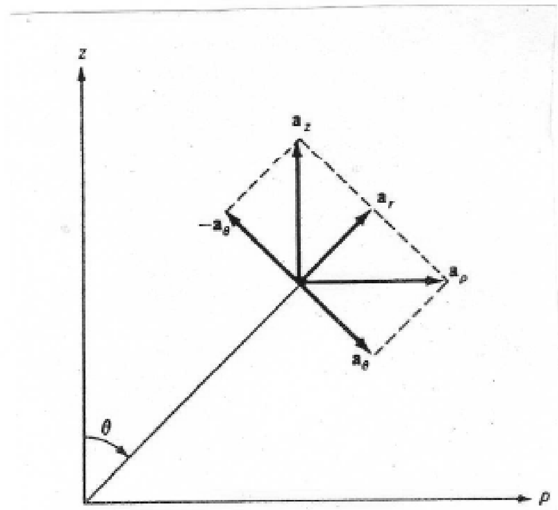
รูปที่ 2.2

∴

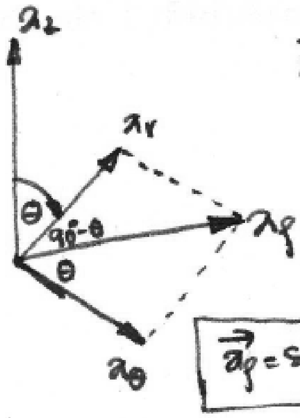
$$\boxed{\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\phi\\ y&=r\sin\theta\sin\phi\\ z&=r\cos\theta\end{aligned}}$$

จากทรงกลมเป็น
คาร์ทีเซียน.

- ความสัมพันธ์ของ (a_x, a_y, a_z) และ (a_r, a_θ, a_ϕ)



จาก



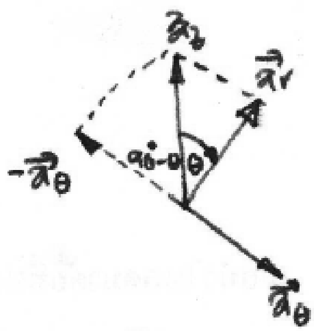
$\vec{a}_\rho = \vec{a}_r \cos(90^\circ-\theta) + \vec{a}_\theta \cos\theta$

$\therefore \vec{a}_\rho = \sin\theta\,\vec{a}_r + \cos\theta\,\vec{a}_\theta$

$$\boxed{\vec{a}_\rho = \sin\theta\,\vec{a}_r + \cos\theta\,\vec{a}_\theta}$$

รูปที่ 23

4/8



รูปที่ 24

$\vec{a}_z = \cos\theta\,\vec{a}_r - \cos(90^\circ-\theta)\,\vec{a}_\theta$

$$\boxed{\vec{a}_z = \cos\theta\,\vec{a}_r - \sin\theta\,\vec{a}_\theta}$$

จากระบบคาร์ทีเซียน.

$\vec{a}_x = \cos\phi\,\vec{a}_\rho - \sin\phi\,\vec{a}_\phi$

$\vec{a}_y = \sin\phi\,\vec{a}_\rho + \cos\phi\,\vec{a}_\phi$

$$\therefore\ \vec{a}_x = \cos\phi\left[\sin\theta\,\vec{a}_r + \cos\theta\,\vec{a}_\theta\right] - \sin\phi\,\vec{a}_\phi$$

$$\vec{a}_x = \sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_\theta - \sin\phi\,\vec{a}_\phi$$

$$\therefore\ \vec{a}_y = \sin\phi\left[\sin\theta\,\vec{a}_r + \cos\theta\,\vec{a}_\theta\right] + \cos\phi\,\vec{a}_\phi$$

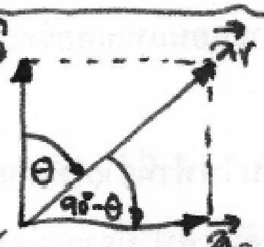
$$\vec{a}_y = \sin\theta\sin\phi\,\vec{a}_r + \cos\theta\sin\phi\,\vec{a}_\theta + \cos\phi\,\vec{a}_\phi$$

ดังนั้น $(r,\theta,\phi) \rightsquigarrow (x,y,z)$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_x &= \sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_\theta - \sin\phi\,\vec{a}_\phi\\ \vec{a}_y &= \sin\theta\sin\phi\,\vec{a}_r + \cos\theta\sin\phi\,\vec{a}_\theta + \cos\phi\,\vec{a}_\phi\\ \vec{a}_z &= \cos\theta\,\vec{a}_r - \sin\theta\,\vec{a}_\theta\end{aligned}}$$

ทรงกลม ⇝ cartitial   เพื่อจะนำไปหาค่า A_ρ, A_ϕ, A_z

$(a_x, a_y, a_z) \rightsquigarrow (a_r, a_\theta, a_\phi)$



รูปที่ 25

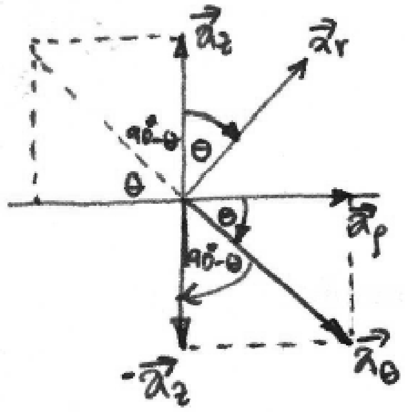
$$\vec{a}_r = \cos(90^\circ-\theta)\,\vec{a}_\rho + \cos\theta\,\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_r = \sin\theta\,\vec{a}_\rho + \cos\theta\,\vec{a}_z$$

จาก $\vec{a}_\rho = \cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y$

$$\therefore\ \vec{a}_r = \sin\theta\left[\cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y\right] + \cos\theta\,\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{a}_y + \cos\theta\,\vec{a}_z$$



รูปที่ 28

$$\vec{a}_\theta = \cos\theta\,\vec{a}_\rho - \vec{a}_z\cos(90^\circ-\theta)$$

$$\vec{a}_\theta = \cos\theta\,\vec{a}_\rho - \sin\theta\,\vec{a}_z$$

$$\therefore \vec{a}_\theta = \cos\theta\left[\cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y\right] - \sin\theta\,\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{a}_y - \sin\theta\,\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\phi = -\vec{a}_x\sin\phi + \vec{a}_y\cos\phi$$

ดังนั้น $(\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z) \rightsquigarrow (\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\phi)$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{a}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{a}_y + \cos\theta\,\vec{a}_z \\
\vec{a}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{a}_y - \sin\theta\,\vec{a}_z \\
\vec{a}_\phi &= -\sin\phi\,\vec{a}_x + \cos\phi\,\vec{a}_y
\end{aligned}}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $A(A_x, A_y, A_z)$ ¥ $A(A_r, A_\theta, A_\phi)$

จาก $\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$

$$\begin{aligned}
\vec{A} = {} & A_x\left[\sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_\theta - \sin\phi\,\vec{a}_\phi\right] + \\
& A_y\left[\sin\theta\sin\phi\,\vec{a}_r + \cos\theta\sin\phi\,\vec{a}_\theta + \cos\phi\,\vec{a}_\phi\right] + \\
& A_z\left[\cos\theta\,\vec{a}_r - \sin\theta\,\vec{a}_\theta\right]
\end{aligned}$$

$$\vec{A} = \left[A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta\right]\vec{a_r} +$$

$$\left[A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta\right]\vec{a_\theta} +$$

$$\left[-A_x\sin\phi + A_y\cos\phi\right]\vec{a_\phi}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} A_r &= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \\ A_\phi &= -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \end{aligned}}$$

4/9

$$(A_x, A_y, A_z) \rightsquigarrow (A_r, A_\theta, A_\phi)$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$(A_r, A_\theta, A_z) \rightsquigarrow (A_x, A_y, A_z]$$

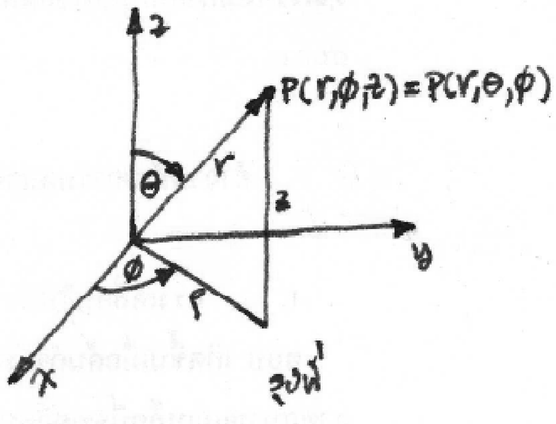
$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

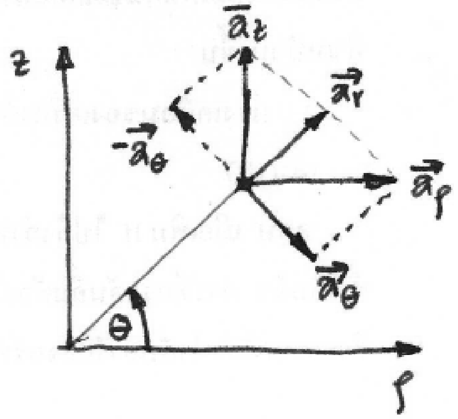
หรือ

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

- ทรงกลม ⇄ ทรงกระบอก

ทั้งสองระบบค่า ϕ เป็นค่าเดียวกัน.

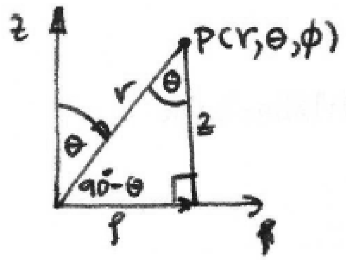




จากรูปที่ 2ค

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

$$(\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$



$$\tan\theta = \frac{\rho}{z} \quad ; \phi = \phi$$

$$\therefore \rho = r\sin\theta \; ; \; z = r\cos\theta \, , \; \phi = \phi$$

ทรงกระบอก → ทรงกลม

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

ทรงกลม → ทรงกระบอก

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

* Ex4.2 ถ้ากำหนด P(-2,6,3) และเวกเตอร์ $\vec{A} = y\vec{a}_x + (x+z)\vec{a}_y$ จงเขียน P ในพิกัดทรงกระบอกและทรงกลม และหา $\vec{A}$ ที่จุด P ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน, ระบบพิกัดทรงกระบอก และทรงกลม.

Sol^n หา P ในพิกัดต่างๆ จาก P(-2, 6, 3)

$x = -2$, $y = 6$, $z = 6$

$$\therefore \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40} \approx 6.32$$

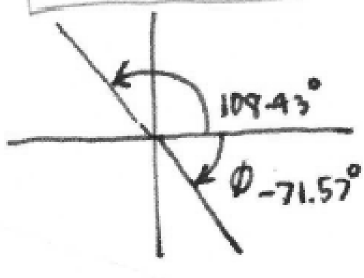
$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{6}{-2} = \cancel{}$$

$$\boxed{\phi = -71.57^\circ = 108.43^\circ}$$

ρ

6

z = 3

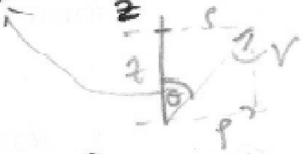


4/10

จาก $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-2)^2+(6)^2+(3)^2}$

$r=\sqrt{49}=7$

และ $\theta=\tan^{-1}\frac{\rho}{z}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\tan^{-1}\frac{6.32}{3}$



$\theta=64.62$

$\therefore P(-2,6,3)=P(6.32,108.43^\circ,3)=P(7,64.62^\circ,108.43^\circ)$

(ข.) $\vec{A}=y\vec{a}_x+(x+z)\vec{a}_y$; $P(-2,6,3)$

$\therefore \vec{A}=6\vec{a}_x+\vec{a}_y$

$A_x=6$; $A_y=1$; $A_z=0$

ตารางที่เปลี่ยน → ทรงกระบอก จาก

$A_r=A_x\cos\phi+A_y\sin\phi$

$A_\phi=-A_x\sin\phi+A_y\cos\phi$

$A_z=A_z$

$\therefore A_r=6\cos(108.43^\circ)+\sin(108.43^\circ)$

$A_r=-1.89+0.949=-0.9482$

$A_\phi=-6\sin(108.43^\circ)+\cos(108.43^\circ)$

$=-5.692+(-0.3161)=-6$

$A_z=0$

$\therefore \quad A_r = -0.9482$

$A_\phi = -6 \quad ; A_z = 0$

$\therefore \vec{A} = -0.9482\vec{a}_r - 6\vec{a}_\phi$

คาร์ทีเซียน → ทรงกลม

$A_r = A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$

$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta$

$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$

$A_r = 6\sin(64.62)\cos(108.43^\circ) + \sin(64.62^\circ)\sin(108.43^\circ)$

$A_r = -1.714 + 0.857 = -0.857$ ✓

$A_\phi = -6\sin(108.43^\circ) + \cos(108.43^\circ)$

$A_\phi = -5.692 - 0.316 = -6$ ✓

$A_\theta = 6\cos(64.62^\circ)\cos(108.43^\circ) + \cos(64.62^\circ)\sin(108.43^\circ)$

$A_\theta = -0.813 + 0.407 = -0.406$ ✓

$\therefore \vec{A} = -0.857\vec{a}_r - 0.406\vec{a}_\theta - 6\vec{a}_\phi$

EX 4.3 จงแปลงเป็น คาร์ทีเซียน และ ทรงกระบอก

$\vec{B} = \frac{10}{r}\vec{a}_r + r\cos\theta\,\vec{a}_\theta + \vec{a}_\phi$

เมื่อ

$B(-3,4,0)$ และ $B(5, \frac{\pi}{2}, -2)$

r, ϕ, z

ทรง~~กระบอก~~กลม → คาร์ทีเซียน

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(-3)^2+(4)^2}}{0} = 90^\circ$ $\quad \theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z}$

$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{4}{-3} = -53.13 = 126.87^\circ$

$\therefore \vec{B} = \frac{10}{5}\vec{a}_r + 5\cos(90^\circ)\vec{a}_\theta + \vec{a}_\phi$

$\boxed{\vec{B} = 2\vec{a}_r + \vec{a}_\phi}$

$A_r = 2 \ ; A_\theta = 0 \ ; A_\phi = 1$

ทรงกลม → คาร์ทีเชียน

$$A_x = \sin\theta\cos\phi \cdot A_r + A_\theta \cos\theta\cos\phi - A_\phi \sin\phi$$

$$= 2\sin(90^\circ)\cdot\cos(126.87^\circ) + 0 - \sin(126.87^\circ)$$

$$A_x = -2$$

$$A_y = A_r \sin\theta\sin\phi + A_\theta \cos\theta\sin\phi + A_\phi \cos\phi$$

$$= 2\sin(90^\circ)\sin(126.87^\circ) + 0 + \cos(126.87^\circ)$$

$$A_y = 1$$

$$A_z = A_r\cos\theta - A_\theta \sin\theta + 0 = 0$$

$$\therefore \boxed{\vec{B} = -2\vec{a}_x + \vec{a}_y}$$

ทรงกลม → ทรงกระบอก

$$\text{จาก } \vec{B} = \frac{10}{r}\vec{a}_r + r\cos\theta\,\vec{a}_\theta + \vec{a}_\phi \; ; B(\underset{\rho}{5}, \tfrac{\pi}{2}, -2)$$

$$\text{จาก } B(5, \tfrac{\pi}{2}, -2) \rightsquigarrow \rho = 5, \phi = \tfrac{\pi}{2} ; z = -2$$

$$\therefore r = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2} = 5.39$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z} = \tan^{-1}\frac{5}{-2} = -68.2^\circ = 111.8^\circ$$

$$\vec{B} = \frac{10}{5.39}\vec{a}_r + 5.39\cos(111.8^\circ)\vec{a}_\theta + \vec{a}_\phi$$

$$\vec{B} = 1.86\vec{a}_r - 2\vec{a}_\theta + \vec{a}_\phi$$

$$A_r = 1.86 \; ; \; A_\theta = -2 \; , \; A_\phi = 1$$

$$A_\rho = A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta + 0$$

$$A_\rho = 1.86 \sin(111.8^\circ) + 2\cos(111.8^\circ)$$

$$A_\rho = 1.73 + 0.743 = 2.473$$

$$A_\phi = A_\phi$$

$$A_z = A_r \cos\theta - A_\theta \sin\theta$$

$$A_z = 1.86\cos(111.8^\circ) + 2\sin(111.8^\circ) + 0$$

$$A_z = -0.691 + 1.86 = 1.169$$

$$\therefore \vec{B} = 2.473\,\vec{a}_\rho + \vec{a}_\phi + 1.169\,\vec{a}_z$$

Thank You !