แคลคูลัสเวกเตอร์

(vector calculus)

- การอนุพันธ์เวกเตอร์
- การอินทิเกรตเวกเตอร์ ๆ คือ

การดำเนินการเกรเดียนต์, การดำเนินการไดเวอร์เจนซ์

การดำเนินการเคิร์ล

เกรเดียนต์ (Gradient) ของสนามสเกลาร์

ปริมาณเวกเตอร์จะเกี่ยวเนื่องกับตัวแปรพิกัด 3 ทิศทาง

ในแต่ละระบบพิกัด คือ (x, y, z), (ρ, ϕ, z), (r, θ, ϕ)

ซึ่งอยู่ในช่องว่างสามมิติ (three dimention space)

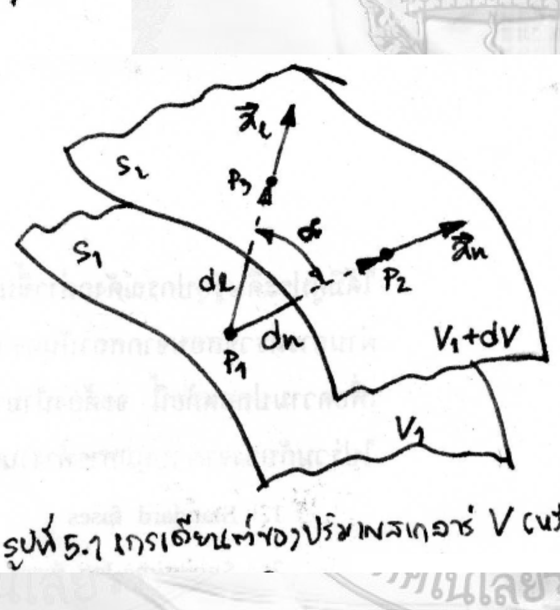
แต่สำหรับเวกเตอร์ที่เป็นสนามเวกเตอร์จะเป็นฟังก์ชัน

4 ตัวแปร คือ (t, u_1, u_2, u_3) เมื่อ t เป็นเวลาและ

u_1, u_2, u_3 เป็นพิกัด 3 มิติ โดยทั่วไปสนามเวกเตอร์
อาจเป็นเปลี่ยนแปลงไปตาม 1, 2, หรือ 3 ตัวแปรก็ได้
แล้วแต่สถานะการณ์ ดังนั้นขนาดอัตราการเปลี่ยนแปลง
ของสนามในช่องว่าง (~~rate~~ space rate of change)
ต้องการจะหาได้โดยการใช้อนุพันธ์ย่อย (partial
derivative เช่น $\frac{\partial V}{\partial x}$)

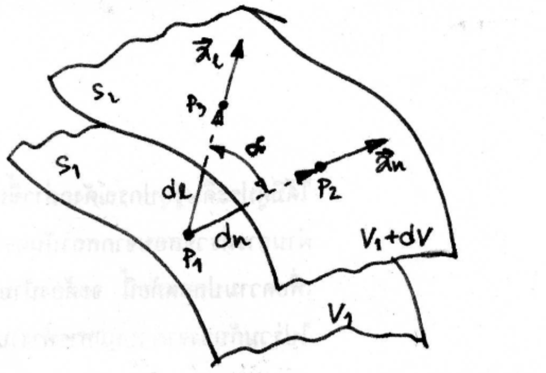
พิจารณาปริมาณสเกลาร์ V ใดๆ โดยสมมุติให้
$V(u_1, u_2, u_3)$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงถึงการกระจาย
อุณหภูมิ (temperature distribution) ภายในห้อง
หรือ $V(u_1, u_2, u_3)$ อาจเป็นศักย์ไฟฟ้า (electric
potential) ในบริเวณใดๆ โดยทั่วไปขนาดของ
V จะคงที่อยู่ หรือเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่ง
ของจุดในช่องว่าง แต่ถ้าคงที่อยู่บนเส้น (line)

หรือพื้นผิว (surface) ที่แน่นอน แสดงดังรูปที่ 5.1
โดยพื้นผิวคือ S_1 และ S_2 โดยที่ S_1 มีขนาดของ V
ที่คงที่ กำหนดให้เป็น V_1 และพื้นผิว S_2 มี
$V_1+\Delta V$ เมื่อ ΔV คือการเปลี่ยนแปลงของ V
จุด P_1 อยู่บนพื้นผิวที่มี V_1 และจุด P_2 จะเป็นไปตาม
จุดที่อยู่บนพื้นผิวที่มี V_1+dV ในทิศทาง
เวกเตอร์ตั้งฉาก หรือเวกเตอร์แนวฉาก
(normal vector: dn)



รูปที่ 5.1 เกรเดียนต์ของปริมาณสเกลาร์ V (หรือ ∇V)

จุด P_3 เป็นจุดที่ใกล้ P_2 ในทิศทางเวกเตอร์ $dl \neq dn$ สำหรับการเปลี่ยนแปลงที่เหมือนกันของ dV อัตราการเปลี่ยนแปลงช่วงว่า $\frac{dV}{dl}$ จะมากที่สุดในทิศทาง dn เพราะ dn เป็นระยะที่สั้นที่สุดระหว่างพื้นผิว S_1 และ S_2 เนื่องจาก $\frac{dV}{dl}$ ขึ้นอยู่กับทิศทางของ dl ดังนั้น $\frac{dV}{dl}$ จึงเป็นอนุพันธ์ทิศทาง (direction derivative) ซึ่งในทางกายภาพดังกล่าวสามารถกำหนดเกรเดียนต์ (gradient) ของสนามสเกลาร์ได้ว่า



รูปที่ 5.1 เกรเดียนต์ของปริมาณสเกลาร์ V (หรือ ∇V)

"เวกเตอร์ที่แสดงทั้งขนาดและทิศทางของอัตราช่วงที่มากสุด (maximum space rate) ของการเพิ่มขึ้นของสเกลาร์ คือเกรเดียนต์ของสเกลาร์"

\+ เกรเดียนต์ (gradient) เป็นการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ค่อยเป็นค่อยไป เช่น การเปิดเครื่องปรับอากาศ (ที่จุด P_1) ความเย็นในห้องจะเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ ดังนั้นจึงเกิดเกรเดียนต์ของอุณหภูมิขึ้น (ที่ P_3 และ P_2 โดยที่ P_2 เกิดเกรเดียนต์ของอุณหภูมิน้อยที่สุด)

จากนิยามของเกรเดียนต์สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\boxed{\text{grad}\, V = \vec{a}_n \frac{dV}{dn}} \qquad (5.1)$$

ใช้ grad V ใช้สัญลักษณ์เป็น ∇V

โดย ∇ คือตัวดำเนินการ del หรือ nabla

ดังนั้น

$$\boxed{\nabla V = \vec{a}_n \frac{dV}{dn}} \qquad (5.2)$$

สมการ (5.2) เป็นเกรเดียนต์ของปริมาณสเกลาร์ V
สมมุติให้ V เป็นอุณหภูมิต่อ t (∇t) เป็นความ
เย็นที่ออกมาจากเครื่องปรับอากาศในทิศทาง x และเมื่อ
เดินเข้าหาเครื่องปรับอากาศในทิศทาง x (y, z คงที่)
ซึ่งความเย็นจะเพิ่มขึ้น โดยการเปลี่ยนแปลง
อุณหภูมิ (เพิ่มขึ้น) เขียนได้ดัง

$$\nabla t = \vec{a}_x \frac{dV}{dx}$$

เมื่อเดินหน้าออกจาก Air ความเย็นจะลดลง
ซึ่งเขียนสมการได้เป็น

$$\nabla t = -\vec{a}_x \frac{dV}{dx}$$

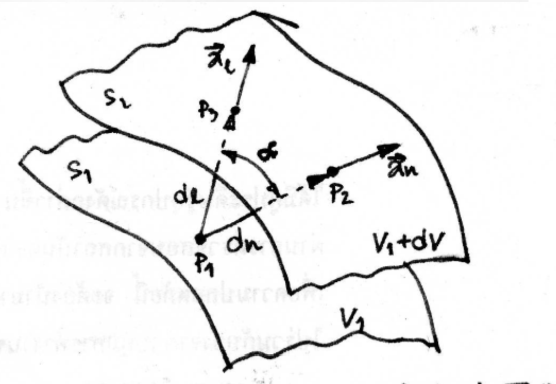
โดย V เป็นฟังก์ชันของ x หรือ $V = V(x)$

อนุพันธ์ V ตามเส้นทาง (path) dl จะได้

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dl} \cdot \frac{dn}{dn}$$

$$= \frac{dV}{dn} \cdot \frac{dn}{dl}$$

จากรูป 5.1

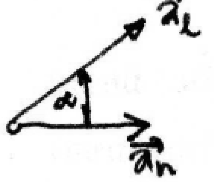


รูปที่ 5.1 เกรเดียนท์ของปริมาณสเกลาร์ V (หรือ ∇V)

$$\vec{a}_n\cdot\vec{a}_l = |a_n||a_l|\cos\alpha$$

$$\vec{a}_n\cdot\vec{a}_l = 1\times 1\times \cos\alpha$$

$$\therefore\ \vec{a}_n\cdot\vec{a}_l = \cos\alpha$$



$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{\vec{a}_n}{\vec{a}_l}$$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{dn}{dl}$

ดังนี้ $$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dn}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{dn}\cdot\vec{a}_n\cdot\vec{a}_l$$

$$\frac{dV}{dl} = \left[\frac{dV}{dn}\cdot\vec{a}_n\right]\cdot\vec{a}_l$$

ดังนั้น $$\boxed{\frac{dV}{dl} = (\nabla V)\cdot\vec{a}_l} \qquad (5.3)$$

สมการ (5.3) แสดงให้เห็นว่า อัตราต่อระยะทางของการเพิ่มขึ้นของ V ในทิศทาง $\vec{a}_l$ จะเท่ากับโปรเจกชั่น (projection) หรือส่วนประกอบของเกรเดียนท์ของ V ในทิศทางนั้น ซึ่งจะเขียนสมการ (5.3) ได้ว่า

$$dV = (\nabla V)\cdot d\vec{l} \qquad (5.4)$$

เมื่อ $d\vec{l} = dl\,\vec{a}_l$

dV เป็นอนุพันธ์รวมของ V ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง จาก $P_1\rightarrow P_3$

ดังนั้นสมการ (5.4) เขียนได้เป็น

$$dV=\left(\vec{a}_{l_1}\frac{\partial}{\partial l_1}+\vec{a}_{l_2}\frac{\partial}{\partial l_2}+\vec{a}_{l_3}\frac{\partial}{\partial l_3}\right)V\cdot\left(\vec{a}_{l_1}dl_1+\vec{a}_{l_2}dl_2+\vec{a}_{l_3}dl_3\right)$$

$$\boxed{dV=\frac{\partial V}{\partial l_1}dl_1+\frac{\partial V}{\partial l_2}dl_2+\frac{\partial V}{\partial l_3}dl_3} \qquad (5.5)$$

เมื่อ dl_1, dl_2, dl_3 เป็นส่วนประกอบของการกระจัด อนุพันธ์เวกเตอร์ (Vector differential displacement: dl) ซึ่งจะถูกกำหนดตามระบบพิกัดเส้น

$(u_1,u_2,u_3)=(x,y,z)$ ดังนั้น $dl_1,dl_2,dl_3 = dx,dy,dz$ ดังนั้นเขียน dV ในสมการ (5.5) ให้อยู่ในรูปแบบผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product หรือ dot product) ของเวกเตอร์สองตัว

$$dV=\left(\vec{a}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{a}_x dx+\vec{a}_y dy+\vec{a}_z dz\right)$$

$$\boxed{dV=\left(\vec{a}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cdot dl} \qquad (5.6)$$

เทียบนิพจน์ด้านขวาของ (5.6) กับ (5.4) จะได้

$$\boxed{\nabla V=\vec{a}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}} \qquad (5.7)$$

หรือ

$$\boxed{\nabla V=\left(\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)V} \qquad (5.8)$$

ดังนั้น

$$\boxed{\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}} \qquad (5.9)$$

เป็นตัวดำเนินการในพิกัดฉาก

และสำหรับระบบพิกัดตั้งฉาก (orthogonal coordinate system) ทั่วไป (สามมิติ) ซึ่งมี (u_1, u_2, u_3) เป็นจุดพิกัดใดๆ และมีสัมประสิทธิ์เมทริกซ์ (metric coefficients) เป็น (h_1, h_2, h_3) ดังนี้

$$\boxed{\nabla = \left[\vec{a}_{u_1} \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \vec{a}_{u_2} \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \vec{a}_{u_3} \frac{\partial}{h_3 \partial u_3}\right]} \qquad (5.10)$$

เป็น ∇ ในระบบพิกัดเชิงตั้งฉากทั่วไป

ตัวอย่างที่ 5.1

ความเข้มสนามไฟฟ้าสถิต (electrostatic field intensity: E) โดยทั่วไปจะกำหนดจากเกรเดียนต์ลบของศักย์ไฟฟ้าสเกลาร์ $\vec{V}$ นั่นคือ $\vec{E} = -\nabla \vec{V}$ ดังนั้น

จงหา E ที่จุด (0,1,0) ถ้า

ก.) $V = V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)$

ข.) $V = E_0 R \cos\theta$

Solⁿ

ก.) $V = V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)$

จาก $\quad \vec{E} = -\nabla V$

จากสมการ (5.ก จะได้

$$\vec{E} = -\left[\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right] V$$

$$= -\left[\vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right] V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)$$

$$= -\left[\vec{a}_x V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) \frac{\partial e^{-x}}{\partial x} + \vec{a}_y V_0 e^{-x} \frac{\partial \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)}{\partial y} + \vec{a}_z V_0 \frac{\partial}{\partial z} e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)\right]$$

$$= -\left[\vec{a}_x V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) \frac{\partial e^{-x}}{\partial x} + \vec{a}_y V_0 e^{-x} \frac{\partial \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)}{\partial y} + \vec{a}_z V_0 \frac{\partial}{\partial z} e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)\right]$$

$$= -\left[-\vec{a}_x V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) + \vec{a}_y V_0 e^{-x} \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right) + 0\right]$$

$$E = \vec{a}_x V_0 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) - \vec{a}_y V_0 e^{-x} \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)$$

หรือ

$$\vec{E} = E(x,y,z) = \left[\vec{a}_x \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right) - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)\right] V_0 e^{-x}$$

$$\therefore E(0,1,0) = \left[\vec{a}_x \sin\left(\frac{\pi(1)}{4}\right) - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi(1)}{4}\right)\right] V_0 e^{-(0)}$$

$$E(0,1,0) = \left[\vec{a}_x \frac{1}{\sqrt{2}} - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] V_0$$

$$E(0,1,0) = \left(\vec{a}_x - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\right)\frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{E}(0,1,0) = \vec{a}_E E$$

ซึ่ง $\vec{a}_E$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของสนามไฟฟ้า

E คือขนาดของสนามไฟฟ้า

ดัง $\quad \vec{E} = \left(\vec{a}_x - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\right)\frac{V_0}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad E = |\vec{E}|$

$$E = \sqrt{\left[\frac{V_0}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{V_0 \cdot \pi}{4\sqrt{2}}\right]^2}$$

$$E = V_0\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{32}} = V_0\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)}$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}$$

$\because \quad \vec{a}_E = \frac{\vec{E}}{|E|}$

$$\vec{a}_E = \left(\vec{a}_x - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\right)\frac{V_0}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\frac{V_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}}$$

$$\boxed{\vec{a}_E = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}}\left(\vec{a}_x - \vec{a}_y \frac{\pi}{4}\right)} \longleftarrow$$

ง.) $\underline{V = E_0 r \cos\theta}$

จากค่าปริมาณความยาวดิฟเฟอร์เรนเชียลของระบบ

พิกัดทรงกลม จะได้

$(h_1, h_2, h_3) = (1, r, r\sin\theta)$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\left[\vec{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} + \vec{a}_\phi \frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\phi}\right] E_0 r\cos\theta$$

$$\vec{E} = -\left[\vec{a}_r E_0\cos\theta \frac{\partial r}{\partial r} + \vec{a}_\theta E_0 r \frac{\partial \cos\theta}{r\partial\theta} + \vec{a}_\phi \frac{\partial E_0 r\cos\theta}{r\sin\theta\,\partial\phi}\right]$$

$$\vec{E} = -\left[\vec{a}_r E_0\cos\theta - \vec{a}_\theta E_0 \sin\theta + 0\right]$$

$$\therefore \vec{E} = -\vec{a}_r E_0\cos\theta + \vec{a}_\theta E_0\sin\theta$$

สรุป ∇V ในระบบพิกัดต่างๆ.

$$\boxed{\nabla V = \vec{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}}$$ พิกัดฉาก

$$\boxed{\nabla V = \vec{a}_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \vec{a}_\phi \frac{\partial V}{\rho \partial \phi} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}}$$ พิกัดทรงกระบ

$$\boxed{\nabla V = \vec{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \vec{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}}$$ ทรงก

ตัวอย่าง 5.2 จงหาเกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์

(ก.) $V = e^{-z}\sin(2x)\cosh(y)$

(ข) $U = \rho^2 z\cos(2\phi)$

(ค) $W = 10r\sin^2\theta\cos\phi$

(ก.) $V = e^{-z}\sin(2x)\cosh(y)$

อยู่ในระบบพิกัดฉาก

$$\therefore \nabla V = \vec{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla V = \vec{a}_x e^{-z} \cosh(y) \frac{\partial \sin(2x)}{\partial x} + \vec{a}_y e^{-z} \sin(2x) \frac{\partial \cosh(y)}{\partial y}$$

$$+ \vec{a}_z \cosh(y) \sin(2x) \frac{\partial e^{-z}}{\partial z}$$

$$\nabla V = \vec{a}_x 2\cos(2x) \cosh(y) e^{-z} + \vec{a}_y \sin(2x) \sinh(y) e^{-z}$$

$$- \vec{a}_z \sin(2x) \cosh(y) e^{-z}$$

ง.) $U = \rho^2 z \cos(2\phi)$

อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\therefore \nabla U = \vec{a}_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \vec{a}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla U = \vec{a}_\rho z \cos(2\phi) \frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} + \vec{a}_\phi \frac{1}{\rho} \rho^2 z \frac{\partial \cos(2\phi)}{\partial \phi}$$

$$+ \vec{a}_z \rho^2 \cos(2\phi) \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= \vec{a}_\rho 2\rho z \cos(2\phi) - \vec{a}_\phi 2\rho z \sin(2\phi) + \vec{a}_z \rho^2 \cos(2\phi)$$

ค.) $W = 10r\sin^2\theta\cos\phi$ อยู่ในพิกัดทรงกลม

$$\nabla W = \vec{a}_r \frac{\partial W}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta} + \vec{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial \phi}$$

$$= \vec{a}_r 10\sin^2\theta\cos\phi \frac{\partial r}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r} 10r\cos\phi \frac{\partial \sin^2\theta}{\partial \theta}$$

$$+ \vec{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \sin^2\theta \, 10r \frac{\partial \cos\phi}{\partial \phi}$$

$\partial \sin^2\theta$

$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta)$

$-\frac{1}{2}(2)(-\sin 2\theta)$

$\sin 2\theta$

$$= \vec{a}_r 10\sin^2\theta\cos\phi + \vec{a}_\theta 10\sin(2\theta)\cos\phi$$

$$- \vec{a}_\phi 10\sin\theta\sin\phi$$

ตัวอย่างที่ 5.3 กำหนดให้ $W = x^2y^2 + xyz$ จงคำนวณหา ∇W และอนุพันธ์ทิศทาง $\frac{dW}{dl}$ ใน ทิศทาง $\vec{a}_x 3 + \vec{a}_y 4 + \vec{a}_z 12$ ที่ $(2,-1,0)$

Sol^n จาก

$$\nabla W = \vec{a}_x \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial \vec{W}}{\partial z}$$

$$\nabla W = \vec{a}_x \frac{\partial(x^2y^2 + xyz)}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial(x^2y^2 + xyz)}{\partial y}$$

$$\vec{a}_z \frac{\partial(x^2y^2 + xyz)}{\partial z}$$

$$\nabla W = \vec{a}_x(2xy^2 + yz) + \vec{a}_y(2x^2y + xz) + \vec{a}_z xy$$

ที่ $(2,-1,0)$ ในทิศทาง $3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 12\vec{a}_z$

$$\nabla W = \vec{a}_x\left[2(2)(-1)^2 + (-1)(0)\right] + \vec{a}_y\left[2(2)^2(-1) + (2)(0)\right] + \vec{a}_z(2)(-1)$$

$$\nabla W = 4\vec{a}_x - 8\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$$

หาค่า $\frac{dW}{dl}$ จากสมการ (5.3) จะได้ว่า

$$\frac{dW}{dl} = (\nabla \vec{W}) \cdot \vec{a}_l$$

จาก $\vec{l} = 3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 12\vec{a}_z$

ดังนั้น $\vec{a}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$

$$|\vec{l}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \quad \vec{a}_l = \frac{3}{13}\vec{a}_x + \frac{4}{13}\vec{a}_y + \frac{12}{13}\vec{a}_z$$

$$\nabla W \cdot \vec{a}_l = \left[4 \times \frac{3}{13}\right] - \left[8 \times \frac{4}{13}\right] - \left[2\,\frac{12}{13}\right]$$

$$= \frac{12}{13} - \frac{32}{13} - \frac{24}{13} = -\frac{44}{13}$$

ตัวอย่างที่ 5.4 สมมติให้ $V = xy - 2yz$
ที่จุด $P(2,3,6)$ จงหา
(ก.) ทิศทางและขนาดของ V ที่เพิ่มขึ้นสูงสุด
(ข.) อัตราต่อระยะทาง (space rate) ของ V ที่ลดลง ในทิศทางที่ตรงไปยังจุดกำเนิด.

Sol^n

(ก.) ทิศทางและขนาดของ V ที่เพิ่มขึ้นสูงสุด

คือ ∇V ที่จุด $P(2,3,6)$

$$\nabla V = \vec{a}_x \frac{\partial(xy-2yz)}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial(xy-2yz)}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial(xy-2yz)}{\partial z}$$

$$\nabla V = \vec{a}_x(y) + \vec{a}_y(x-2z) - \vec{a}_z(2y)$$

ที่จุด $P(2,3,6)$

$$\nabla V = 3\vec{a}_x + \vec{a}_y(2-2(6)) - \vec{a}_z(2(3))$$

$$\boxed{\nabla V = 3\vec{a}_x - 10\vec{a}_y - 6\vec{a}_z}$$

(ข.) อัตราต่อระยะทาง (space rate) ของ V ที่ลดลง ในทิศทางที่ตรงไปยังจุดกำเนิด

คือ $\frac{dV}{dl} = (\nabla V)\cdot\vec{a}_l$ มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$\vec{l}$ ในที่นี้คือเส้นตรงที่พุ่งจากจุด $P(2,3,6)$ ไปสู่จุด $(0,0,0)$ ดังนั้น

$$\vec{l} = -2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - 6\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{-2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - 6\vec{a}_z}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}}$$

$$\therefore \vec{a}_l = -\frac{2}{7}\vec{a}_x - \frac{3}{7}\vec{a}_y - \frac{6}{7}\vec{a}_z$$

$$\therefore -(\nabla V) \cdot \vec{a}_l = -\left[3\left(-\frac{2}{7}\right) + 10\left(-\frac{3}{7}\right) - 6\left(-\frac{6}{7}\right)\right]$$

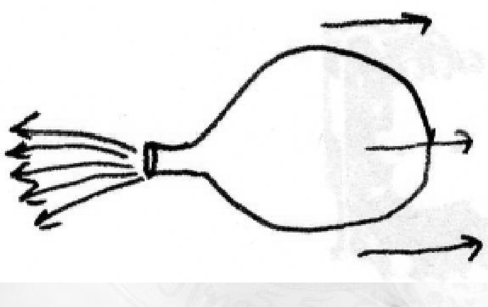
$$= -\left[-\frac{6}{7} + \frac{30}{7} + \frac{36}{7}\right] = -\left[+\frac{60}{7}\right]$$

$$\therefore \frac{dV}{dl} = -\frac{60}{7} \longleftarrow$$

5.2 ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) ของสนามเวกเตอร์ (Vector Field)

ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) คือการพุ่งออก

เช่นการเป่าลูกโป่งจนโตเมื่อปล่อยมือ ลูกโป่งจะพุ่งไปข้างหน้า ทั้งนี้เนื่องมาจากอากาศพุ่งออกมาจากลูกโป่ง สวนทางกับการเคลื่อนที่ของลูกโป่ง ซึ่งปรากฏการณ์นี้เป็นตัวอย่างการพุ่งออก (divergence)



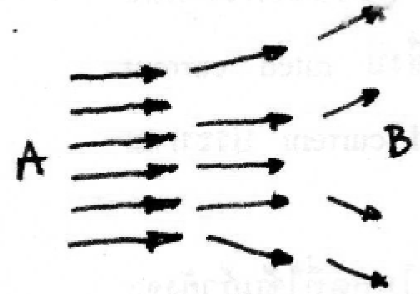
รูปที่ 5.2

ถ้า $\vec{F}$ เป็นเวกเตอร์ลูกโป่ง จะกำหนดให้

divergence $\vec{F} = \nabla\cdot F$

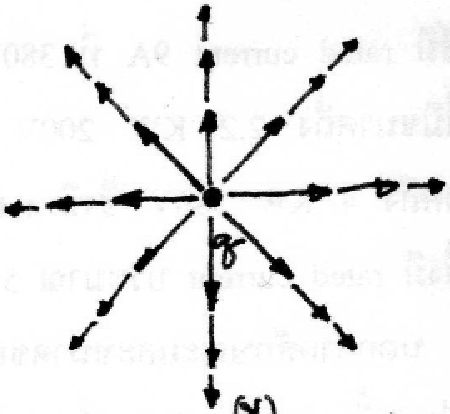
สนามเวกเตอร์ แสดงด้วยเส้นสนามทิศทาง (directed field line) หรือ เส้นฟลักซ์ (flux line)

แสดงดังรูปที่ 5.3



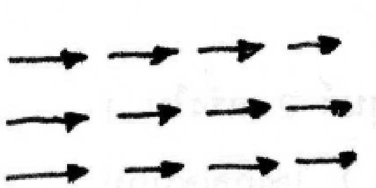
(ก)

บริเวณ A สนามหนาแน่นกว่า B



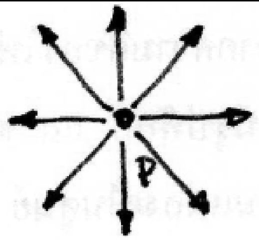
(ข)

จุดชุมสนามหนาแน่นที่สุด



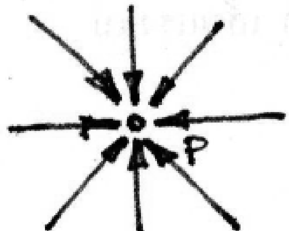
(ค)

สนามเอกรูป, สนามสม่ำเสมอ (uniform field)



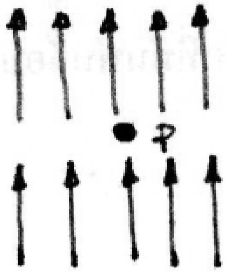
(ง)

ไดเวอร์เจนซ์บวก



(จ)

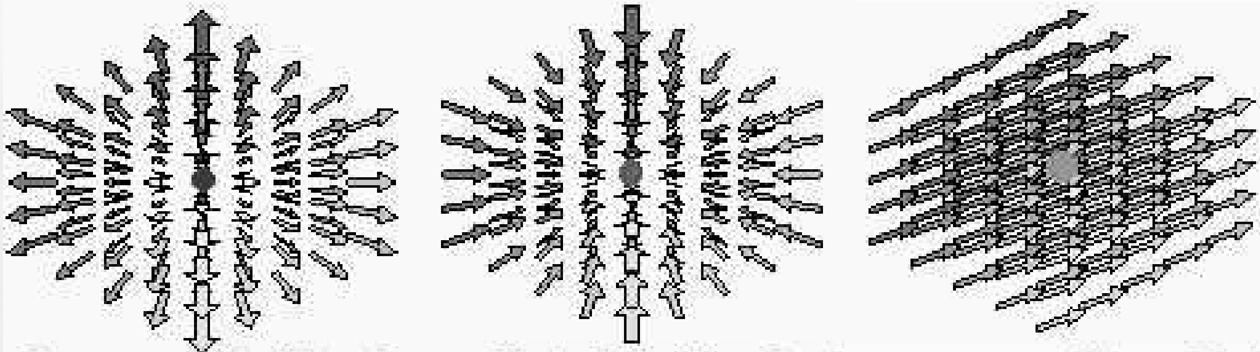
ไดเวอร์เจนซ์ลบ



(ฉ)

ไดเวอร์เจนซ์ศูนย์

รูปที่ 5.3



Source: Div(F) > 0 Sink: Div(F) < 0 Incompressible: Div(F) = 0

ความเข้มของสนามเวกเตอร์ วัดโดยจำนวนเส้นฟลักซ์ที่ไหลผ่านพื้นผิวหนึ่งหน่วยซึ่งตั้งฉากกับสนามเวกเตอร์

สำหรับปริมาตรซึ่งมีพื้นผิวล้อมปิด (enclosed surface) และประกอบด้วยแหล่งกำเนิด (source) สนามจะไหลออกจากพื้นผิว และถ้าไม่มีแหล่งกำเนิด สนามจะไหลเข้า ที่นี่ไดเวอร์เจนซ์บวกสุทธิ (net positive divergence) จะแสดงถึงแหล่งกำเนิดของการไหลภายในปริมาตร และไดเวอร์เจนซ์ลบสุทธิจะแสดงถึงซิงค์ (Sink) หรือแสดงถึงฟลักซ์ที่ลดลง

การไหลออกสุทธิของของไหลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร เป็นการวัดความแรง (strength) ของแหล่งกำเนิดล้อมปิด (enclosed source)

สนามสม่ำเสมอ หรือสนามเอกรูป (uniform field) จะมีจำนวนฟลักซ์ที่ไหลเข้าและไหลออกเท่ากันผ่าน ปริมาตรล้อมปิด (enclosed volume) ที่ไม่มีแหล่งกำเนิด ทำให้ผลลัพธ์ไดเวอร์เจนซ์จะเป็นศูนย์

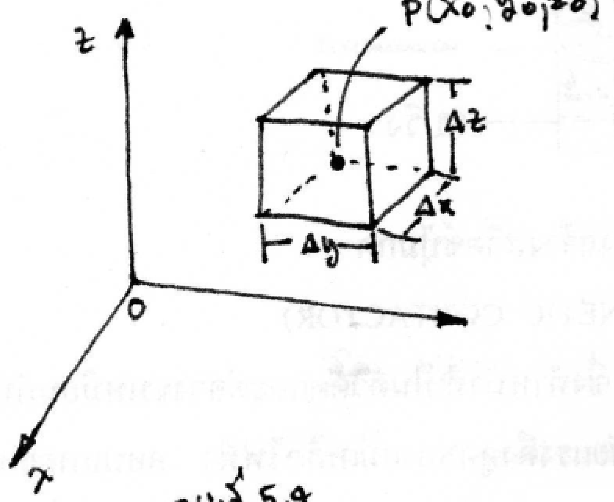
กำหนดให้ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์ใดๆ $\vec{A}$ ที่จุดใดๆ ด้วย $\mathrm{div}\vec{A}$ ซึ่งจะแสดงถึงฟลักซ์ซึ่งออกสุทธิ (net outward flux) ของ $\vec{A}$ ต่อปริมาตรหนึ่งหน่วย ในขณะเมื่อกำหนดให้ปริมาตรรอบๆ จุดนั้นเข้าสู่ศูนย์ ดังนี้

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0}\left[\frac{\oint_s \vec{A}\cdot d\vec{s}}{\Delta v}\right]} \qquad (5.11)$$

$\oint_s \vec{A}\cdot d\vec{s}$ เป็นอินทิกรัลตามพื้นผิว (surface integral) ซึ่งเป็นพื้นผิวปิดทั้งหมด

โดยเทอมที่ถูกอินทิเกรตเป็นองค์ประกอบพื้นผิวอนุพันธ์เวกเตอร์ (vector differential surface element : $d\vec{S} = \vec{a}_n ds$) ซึ่งมีขนาดเท่ากับ ds และมีทิศทางเป็นไปตามเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย $\vec{a}_n$ ซึ่งมีทิศทางชี้ออกจากปริมาตรล้อมปิด

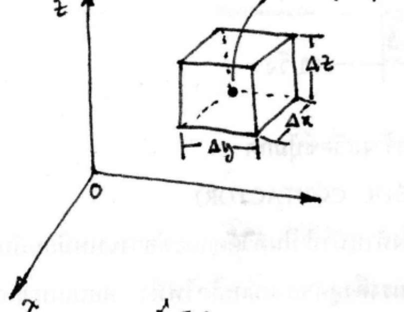
อินทิกรัลตามพื้นผิวล้อมปิดจะแสดงถึงฟลักซ์ไหลออกสุทธิของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ สมการ 5.11 เป็นนิยามทั่วไปของ $\mathrm{div}\vec{A}$ ที่เป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งขนาดอาจเปลี่ยนแปลงที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง ในขณะที่ $\vec{A}$ เปลี่ยนแปลง (ไดเวอร์เจนซ์ $\vec{A}$) ซึ่งสมการ (5.11) อยู่ในพิกัดทั่วไป สำหรับตัวต่อไปจะอธิบายในพิกัดฉาก



รูปที่ 5.4

พิจารณาปริมาตรเชิงอนุพันธ์ในสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ แสดงดังรูปที่ 5.4 จะประกอบด้วยด้าน $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ เป็นจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $P(x_0, y_0, z_0)$ โดย $\vec{A}$ ในพิกัดฉากคือ

$$\boxed{\vec{A} = \vec{a}_x A_x + \vec{a}_y A_y + \vec{a}_z A_z}$$



รูปที่ 5.4

ต้องการหา $\mathrm{div}\vec{A}$ ที่จุด (x_0, y_0, z_0)

เนื่องจากปริมาตรเชิงอนุพันธ์มีหกด้าน (6 พื้นผิว) ดังนั้นอินทิกรัลตามพื้นผิวแยกได้เป็น 6 ส่วน

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \left[\int_{\text{พื้นผิวด้านหน้า}} + \int_{\text{พื้นผิวด้านหลัง}} + \int_{\text{พื้นผิวด้านขวา}} + \int_{\text{พื้นผิวด้านซ้าย}} + \int_{\text{พื้นผิวด้านบน}} + \int_{\text{พื้นผิวด้านล่าง}}\right]\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\text{พื้นผิวด้านหน้า}} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \vec{A}_{\text{พื้นผิวด้านหน้า}} \cdot \Delta\vec{s}_{\text{พื้นผิวด้านหน้า}}$$

$$= \vec{A}_{\text{พื้นผิวด้านหน้า}} \cdot \vec{a}_x \Delta y \Delta z$$

$$= A_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\vec{a}_x \cdot \vec{a}_x \Delta y \Delta z$$

$\vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1$

$$= A_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\Delta y \Delta z \qquad (5.13)$$

เทอม $A_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$ กระจายอยู่ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) รอบๆ ค่าของ A_x ที่จุด (x_0, y_0, z_0) ได้ดังนี้

$$A_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0} + \text{พจน์อันดับสูง} \qquad (5.14)$$

โดยพจน์อันดับสูง (higher-order term) จะประกอบด้วย

$$\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2, \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3, \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^4 \ldots\ldots$$

พื้นผิวด้านหลัง

$$\int_{\text{พื้นผิวด้านหลัง}} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \vec{A}_{\text{พื้นผิวด้านหลัง}} \cdot \Delta\vec{s}_{\text{พื้นผิวด้านหลัง}}$$

$$= \vec{A}_{\text{พื้นผิวด้านหลัง}} \cdot -\vec{a}_x \Delta y \Delta z$$

$$= A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\vec{a}_x \cdot -\vec{a}_x \Delta y \Delta z$$

$$= -A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\Delta y \Delta z \qquad (5.15)$$

กระจาย $A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$ จะได้

$$A_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) = A_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0} + \text{พจน์อันดับสูง} \qquad (5.16)$$

แทนสมการ (5.14) ลงใน (5.13) และแทน (5.16) ลงใน (5.15)

จะได้

$$\left[\int_{\text{ผิวด้านหน้า}} + \int_{\text{ผิวด้านหลัง}}\right]\vec{A}\cdot d\vec{S} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \text{พจน์อันดับสูง}\right]\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (5.17)$$

ในทำนองเดียวกันของพจน์ที่เกิดจากผิวด้านขวาและผิวด้านซ้าย

จะได้

$$\left[\int_{\text{ผิวด้านขวา}} + \int_{\text{ผิวด้านซ้าย}}\right]\vec{A}\cdot d\vec{S} = \left[\frac{\partial A_y}{\partial y} + \text{พจน์อันดับสูง}\right]\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (5.18)$$

ผิวด้านล่าง + ผิวด้านบน

$$\left[\int_{\text{ผิวด้านบน}} + \int_{\text{ผิวด้านล่าง}}\right]\vec{A}\cdot d\vec{S} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} + \text{พจน์อันดับสูง}\right]\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (5.19)$$

นำ (5.17), (5.18), (5.19) แทนใน (5.12) จะได้

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$+ \text{พจน์อันดับสูงของ } \Delta x, \Delta y, \Delta z \qquad (5.20)$$

จาก $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ นำสมการ (5.20) แทนใน (5.11) จะได้

$\text{div}\vec{A}$ ในระบบพิกัดฉาก คือ

$$\boxed{\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \qquad (5.21)$$

$\nabla\cdot\vec{A}$ ในพิกัดฉาก

พจน์อันดับสูงจะไม่เกิดขึ้น ในขณะที่ปริมาตร
เชิงอนุพันธ์ $\Delta x \Delta y \Delta z$ เข้าสู่ศูนย์ โดยทั่วไปค่าของ
$\mathrm{div}\vec{A}$ จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดที่พิจารณาค่าของมัน
$\mathrm{div}\vec{A}$ ที่จุดนั้นๆ สมการ (5.21) ไม่ได้กำหนดจุด

(x_0, y_0, z_0)

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = \mathrm{div}\vec{A}} \qquad (5.22)$$

$\mathrm{div}\vec{A}$ ในระบบพิกัดฉาก.

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \qquad (5.21)$$

$\nabla \cdot \vec{A}$ ในพิกัดอื่น

พิกัดทรงกระบอก

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)} \qquad (5.22)$$

พิกัดทรงกลม

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi)} \qquad (5.23)$$

ตัวอย่าง 5.4

จงหาการลู่ออก (divergence) ของสนามเวกเตอร์ต่อไปนี้

(ก) $\vec{P} = \vec{a}_x x^2yz + \vec{a}_z xz$

(ข) $\vec{Q} = \vec{a}_\rho \rho\sin\phi + \vec{a}_\phi \rho^2 z + \vec{a}_z z\cos\phi$

(ค) $\vec{T} = \vec{a}_r \frac{1}{r^2}\cos\theta + \vec{a}_\theta r\sin\theta\cos\phi + \vec{a}_\phi \cos\theta$

Sol^n

ก) $\vec{P}$ อยู่ในพิกัดฉาก. $\vec{P} = \vec{a}_x x^2yz + \vec{a}_z xz$

$$\nabla\vec{P} = \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial (x^2yz)}{\partial x} + \frac{\partial (0)}{\partial y} + \frac{\partial (xz)}{\partial z}$$

$$\nabla\vec{P} = 2xyz + x \longleftarrow$$

ข) $\vec{Q}$ อยู่ในพิกัดทรงกระบอก.

$$\nabla\vec{Q} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(\rho^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(z\cos\phi)$$

$$= \frac{2\rho}{\rho}\sin\phi + 0 + \cos\phi$$

$$\nabla\vec{Q} = 2\sin\phi + \cos\phi$$

(ค) $\vec{T}$ อยู่ในพิกัดทรงกลม.

$$\nabla\vec{T} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\cos\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\cos\phi)\cdot\sin\theta$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\theta) \qquad \frac{1}{r\sin\theta}\, r\cos\phi\,\frac{\partial\sin^2\theta}{\partial\theta}$$

$$\nabla\vec{T} = 0 + \frac{1}{\cancel{r}\sin\theta}\cancel{r}\cos\theta\cos\phi + 0$$

$$\nabla\vec{T} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\phi = \cot\theta\cos\phi \longleftarrow$$

ตัวอย่างที่ 5.5 จงคำนวณหาการลู่ออกของสนามเวกเตอร์ และให้คำนวณการลู่ออกที่จุดต่างๆ

(ก) $\vec{A} = \vec{a}_x yz + \vec{a}_y 4xy + \vec{a}_z y$ ที่ $(1,-2,3)$

(ข) $\vec{B} = \vec{a}_\rho \rho z\sin\phi + \vec{a}_\phi 3\rho z^2\cos\phi$ ที่ $(5, \pi/2, 1)$

(ค) $\vec{C} = \vec{a}_r 2r\cos\theta\cos\phi + \vec{a}_\phi r^{1/2}$ ที่ $(1, \pi/6, \pi/3)$

Sol^n

(ก) $$\nabla\vec{A} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(4xy)}{\partial y} + \frac{\partial(y)}{\partial z}$$

$$= 0 + 4x + 0$$

$$\nabla\vec{A} = 4x \longleftarrow$$

ที่ $(1,-2,3)$; $\nabla\vec{A} = 4(1) = 4 \longleftarrow$

(ข) $\nabla\cdot\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot\rho z\sin\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(3\rho z^2\cos\phi) + \frac{\partial(0)}{\partial z}$

$= \frac{2\rho z\sin\phi}{\rho} + \frac{3\rho z^2}{\rho}(-\sin\phi)$

$2r^3$

$R3r^2$

$\nabla\cdot\vec{B} = 2z\sin\phi - 3z^2\sin\phi$

$\nabla\cdot\vec{B} = (2-3z)z\sin\phi$

ที่ $(5, \pi/2, 1)$ $\nabla\cdot\vec{B} = (2-3(1))(1)\sin(\pi/2)$

$\nabla\cdot\vec{B} = -1 \longleftarrow$

(ค) $\nabla\cdot\vec{C} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 2r\cos\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(r^{1/2})$

$= \frac{6r^2\cos\theta\cos\phi}{r^2}$

$\nabla\cdot\vec{C} = 6\cos\theta\cos\phi$

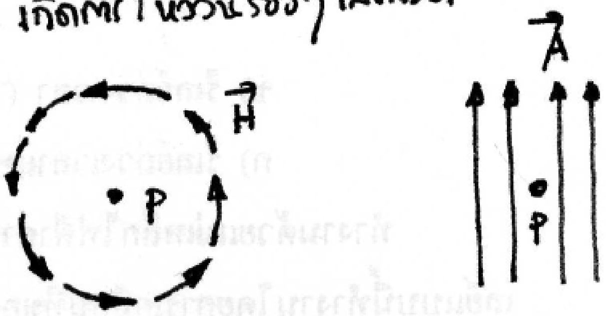
ที่ $(1, \pi/6, \pi/3)$ $\nabla\cdot\vec{C} = 6\cos[\pi/6]\cdot\cos[\pi/3]$

$\nabla\cdot\vec{C} = 2.598 \longleftarrow$

5.3 เคิร์ล (Curl) ของสนามเวกเตอร์

เคิร์ล (Curl) คือการหมุนวน (การไหลวน) เช่น

H เกิดการไหลวนรอบๆ เส้นลวด



(ก) การเคิร์ลที่จุด P (ข) การเคิร์ลที่จุด P เป็นศูนย์

รูปที่ 5.5

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงฟลักซ์ซ์ออกสุทธิ ของเวกเตอร์ตลอดพื้นผิวที่ล้อมรอบปริมาตร ซึ่งแสดงถึง แหล่งกำเนิดที่อยู่ เรียกว่า "แหล่งกำเนิดไหล" (flow source)

สำหรับ div $\vec{A}$ เป็นค่าวัดความแรง (strength) ของแหล่งกำเนิดไหล สำหรับแหล่งกำเนิดอีกชนิดหนึ่ง "แหล่งกำเนิดวน" (vortex source) ซึ่งสนามเวกเตอร์จะเกิดการไหลวนรอบตัวมันเอง, "การไหลวนสุทธิ" (net circulation) หรือ "การไหลวน" (circulation) ของสนามเวกเตอร์รอบทางเดินปิด หรือวิถีปิด (closed path) การไหลวน หรือเคิร์ล (curl)

การไหลวน กำหนดได้จากอินทิกรัลตามเส้นสเกลาร์ (scalar line integral) ของเวกเตอร์ตามคอนทัวร์ (contour: C) หรือวิถี (path: L) ดังนี้

$$\text{การไหลวนของ } \vec{A} \text{ รอบคอนทัวร์ } C = \oint_C \vec{A}\cdot dc = \oint_L A\cdot dl \qquad (5.24)$$

การไหลวนขึ้นอยู่กับชนิดของ $\vec{A}$ ถ้า $\vec{A}$ เป็นแรง (force) ที่กระทำบนวัตถุ การไหลวนของแรงคือ งานที่กระทำโดยแรง ที่เคลื่อนที่วัตถุรอบๆ วิถี

ถ้า $\vec{A}$ เป็นความเข้มสนามไฟฟ้า ค่าที่ไหลวน คือ แรงเคลื่อนไฟฟ้า (electromotive force) รอบวิถีปิด

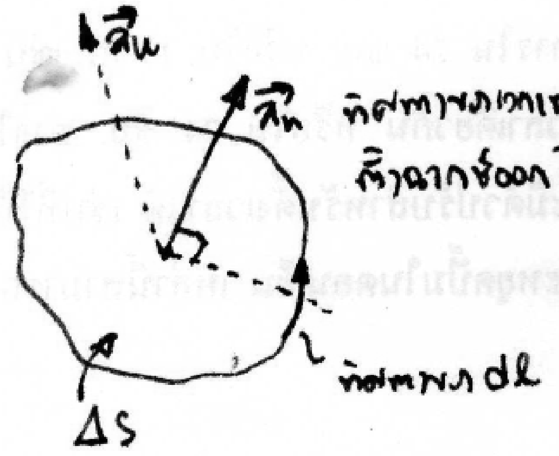
เช่น การเคลื่อนที่ในวงวน (vortex sink) ของน้ำ ความแปรไหลวนจะเป็นสาเหตุให้ของไหล (fluid) มีความเร็วเกิดขึ้น

ซึ่งนิยามของเคิร์ล คือ

"เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{A}$ (curl $\vec{A}$ หรือ $\nabla\times\vec{A}$) เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีส่วนประกอบในทิศทางอันใดอันหนึ่ง เท่ากับอินทิกรัลเส้นของ $\vec{A}$ รอบวิถีปิด (closed path) เล็กๆ ซึ่งอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศทางของส่วนประกอบนั้น คิดต่อหน่วยพื้นที่ หารด้วยพื้นที่ปิดนั้นขณะที่มันลดเล็กลงสู่ศูนย์"

ดังนั้น

$$\boxed{\text{curl}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{1}{\Delta s}\vec{a}_n \oint_C \vec{A}\cdot dl\right]} \qquad (5.25)$$



รูปที่ 5.6 ความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{a}_n$ และ dl

เมื่อใช้ระบบพิกัดต่างๆ

ระบบคาร์ทีเซียน (พิกัดฉาก)

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{a}_x(\nabla\times\vec{A})_x + \vec{a}_y(\nabla\times\vec{A})_y + \vec{a}_z(\nabla\times\vec{A})_z$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{A} = \vec{a}_x\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \vec{a}_y\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \vec{a}_z\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]} \quad (5.26)$$

หรือ

$$\boxed{\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}} \quad (5.27)$$

ระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\mathrm{curl}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A}$$

$1/\rho$

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{a}_\rho\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right] + \vec{a}_\phi\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right] + \vec{a}_z\left[\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]$$

(5.28)

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{a}_\rho & \vec{a}_\phi & \frac{1}{\rho}\vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \begin{array}{cc} \frac{1}{\rho}\vec{a}_\rho & \vec{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_\rho & \rho A_\phi \end{array}$$

(5.29)

ระบบพิกัดทรงกลม

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(A_\theta)}{\partial\phi}\right]\vec{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(A_r)}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial\theta}\right]\vec{a}_\phi$$

(5.30)

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\vec{a}_r & \frac{1}{r\sin\theta}\vec{a}_\theta & \frac{1}{r}\vec{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

1. เกรเดียนต์ (Gradient)

เมื่อนำ ∇ ไปกระทำกับฟังก์ชันสเกลลาร์ $\phi(x, y, z)$ ที่มีความหมาย และสามารถดิฟเฟอเรนชิเอทได้ จะได้เกรเดียนต์ หรือเรียกว่า แกรด (Grad) ซึ่งจะแทนได้เป็น

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

และเกรเดียนต์ของ $\phi(x, y, z)$ จะเป็นย่านเวคเตอร์

2. ไดเวอร์เจนท์ (Divergence)

เมื่อนำ ∇ ไปกระทำกับเวคเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{V}(x, y, z) = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ ที่มีความหมาย และสามารถดิฟเฟอเรนชิเอทได้ จะได้ไดเวอร์เจนท์ของเวคเตอร์ $\vec{V}$ หรือ $\nabla\bullet\vec{V}$ เรียกว่า Div $\vec{V}$ ซึ่งจะแทนได้เป็น

$$\nabla\bullet\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\bullet(\vec{V}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

จะเป็นย่านสเกลลาร์

<u>**นิยาม**</u> ให้ $\vec{V}(x, y, z) = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ เป็นเวคเตอร์ฟังก์ชันที่ทราบค่า และมีอนุพันธ์ที่แต่ละจุด (x, y, z) ในขอบเขต $\Re$ แล้วไดเวอร์เจนท์ของเวคเตอร์ $\vec{V}$ จะแทนได้เป็น

$$\nabla\bullet\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

จะเป็นย่านสเกลลาร์

<u>**ข้อสังเกตุ**</u> $\nabla\bullet\vec{V} \neq \vec{V}\bullet\nabla$ เพราะว่า

$$\vec{V}\bullet\nabla = V_1\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + V_3\frac{\partial}{\partial z}$$ เป็นสัญญากรตัวใหม่

3. เคิร์ล (Curl)

เมื่อนำ ∇ ไปกระทำกับเวคเตอร์ฟังก์ชัน $\vec{V}(x,y,z)=V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k}$ ที่มีความหมาย และสามารถดิฟเฟอเรนชิเอทได้ จะได้เคิร์ลของเวคเตอร์ $\vec{V}$ หรือ $\nabla\times\vec{V}$ เรียกว่าการหมุน ซึ่งจะแทนได้เป็น

$$\nabla\times\vec{V}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times(\vec{V})$$

จะเป็นย่านเวคเตอร์

$$\nabla\times\vec{V}=\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_1 & V_2 & V_3\end{vmatrix}$$

THE END