การแปลงลาปลาซ

10.1 บทนำ (Introduction)

การแปลงลาปลาซ (Laplace transfrom) เป็นการแปลงจากฟังก์ชันหนึ่งไปเป็นอีกฟังก์ชันหนึ่ง หรือเสมือนเป็นเครื่องมือรูปหนึ่งที่นำมาใช้เพื่อสำหรับแทนฟังก์ชัน ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวในรูปของฟังก์ชัน f(t) ใด ๆ ของปัญหาค่าเริ่มต้น และปัญหาค่าขอบ ให้อยู่ในรูปผลรวมเอกซ์โพเนนเชียล e^{jwt} ที่ต่อเนื่องซึ่งความถี่ของเอกซ์โพเนนเชียลจะจำกัดอยู่ในระนาบความถี่เชิงซ้อนบนแกน jw เท่านั้น โดยทั่วๆ ไปจะแทนฟังก์ชัน f(t) ให้อยู่ในรูปผลรวมเอกซ์โพเนนเชียลที่ต่อเนื่องในรูปแบบ e^{st}, $(s = \delta + jw)$ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยการแปลงลาปลาซจะเริ่มต้นด้วยนิยามของการแปลงลาปลาซ แล้วพิจารณาคุณสมบัติต่างๆ เพื่อนำไปหาคำตอบต่อไป

10.2 นิยามของการแปลงลาปลาซ (Definition of laplace transfrom)

กำหนดให้ f(t) เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามทุกๆ $t \geq 0$ ให้ f(t) คูณด้วย e^{-st} แล้วอินทิเกรตค่าขอบ 0 ถึง ∞ หาค่าอินทิเกรตเขียนแทนด้วย F(s) ฟังก์ชันสามารถนิยามโดย

$$F(s) \quad = \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt \qquad \text{.......... 10.1}$$

โดยที่ฟังก์ชัน F(s) จะแปรผันตามค่า s เรียกว่า ลาปลาซทรานฟอร์มสำหรับฟังก์ชันค่าเริ่มต้น f(t) จะเขียนได้ในรูป

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \quad = \quad F(S)$$

โดยที่ $$\boxed{\mathscr{L}\{f(t)\} \quad = \quad F(S) \quad = \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt} \qquad \text{.......... 10.2}$$

10.3 ตารางการแปลงลาปลาซ (Table of the laplace transfrom)

การแปลงลาปลาซโดยนิยาม 10.2 จะสรุปการแปลงลาปลาซของ f(t) ให้อยู่ในรูปของ F(s) เพื่อสะดวกในการใช้หาค่าในทฤษฎีบทต่อไป

	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
3.	t^n, $n = 0, 1, 2...$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
4.	e^{at} e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > 0$

5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$
8.	$\cos h\ at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$

หมายเหตุ $n! = 1 \times 2 \times \ldots n$

$0! = 1$

ตัวอย่างที่ 10.3 จงหาค่า $\mathscr{L}\{t^3\}$

วิธีทำ จากตารางที่ 10.3

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

ตัวอย่างที่ 10.4 จงหาค่า $\mathscr{L}\{e^{4t}\}$

วิธีทำ จากตารางที่ 10.3

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{e^{4t}\} = \frac{1}{s-4}$$

	f(t)	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
3.	t^n, n = 0, 1, 2...	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $s > 0$

ตัวอย่างที่ 10.5 จงหาค่า $\mathscr{L}\{\sin 3t\}$

วิธีทำ จากตารางที่ 10.3

$$\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2-9}$$

5.	sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
6.	cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
7.	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
8.	cos h at	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$

ตัวอย่างที่ 10.6 จงหาค่า $\mathscr{L}\{\cosh 4t\}$

วิธีทำ จากตารางที่ 10.3

$$\mathscr{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{\cosh 4t\} = \frac{3}{s^2-16}$$

10.4 คุณสมบัติการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีที่ 10.4.1 คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

กำหนดให้ฟังก์ชัน f(t) และ g(t) ใดๆ เป็นฟังก์ชันที่สามารถแปลงลาปลาซได้ การแปลงลาปลาซคุณสมบัติเชิงเส้น กล่าวคือ

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathscr{L}\{c_1 \cdot f(t) \pm c_2 \cdot g(t)\} = c_1 \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} \pm c_2\{f(t)\}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 10.7 จงหา $\mathscr{L}\{3 \cos 2t + 4 \sin 3t\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}\{3 \cos 2t + 4 \sin 3t\} = 3\mathscr{L}\{\cos 2t\} + 4\mathscr{L}\{\sin 3t\}$$

$$= 3\left\{\frac{s}{s^2 + 2^2}\right\} + 4\left\{\frac{3}{s^2 + 3^3}\right\}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{3 \cos 2t + 4 \sin 3t\} = \frac{3s}{s^2 + 4} + \frac{12}{s^2 + 27}$$

ตัวอย่างที่ 10.8 จงหา $\mathscr{L}\{5e^{2+3t} + 2 \cosh 3t\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}\{5e^{2+3t} + 2 \cosh 3t\} = 5\mathscr{L}\{e^{2+3t}\} + 2\mathscr{L}\{\cosh 3t\}$$

$$= 5e^2\mathscr{L}\{e^{3t}\} + 2\mathscr{L}\{\cosh 3t\}$$

$$= 5e^2 \cdot \left(\frac{1}{s-3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{s^2 - 3^3}\right)$$

$$\therefore \mathscr{L}\{5e^{2+3t} + 2 \cosh 3t\} = \frac{5e^2}{s-3} + \frac{6}{s^2 - 27}$$

5.	sin at	$\frac{a}{s^2 + a^2}$, s > 0
6.	cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}$, s > 0
7.	sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$, s > |a|
8.	cos h at	$\frac{s}{s^2 - a^2}$, s > |a|

ทฤษฎีที่ 10.4.2 คุณสมบัติการเลื่อนข้อที่ 1 (First shifting property)

กำหนดให้ฟังก์ชัน f(t) เป็นฟังก์ชันที่สามารถแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$\mathscr{L}\{e^{at} \cdot f(t) = F(s-a)$ เมื่อ a คือ ค่าคงที่

กล่าวคือ เลื่อน e^{at} แล้ว $\mathscr{L}\{f(t)\}$ ถ้า $\{e^{at} \cdot f(t)\}$ จะแทน s เท่ากับ s − a ใน สมการ F(s) คือ F(s − a)

พิสูจน์

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt$$

$$\therefore \mathscr{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at} \cdot f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt$$

$$= F(s - a)$$

ตัวอย่างที่ 10.9 จงหาค่า $\mathscr{L}\{e^{4t} \cdot \sin 3t\}$

วิธีทำ เลื่อน e^{4t} แล้วจะได้

$$\mathscr{L}\{\sin 3t\} = \frac{s}{s^2 + 9} = F(s)$$

$$\mathscr{L}\{e^{4t} \cdot \sin 3t\} = F(s - a)$$

$$= \frac{s - 4}{(s - 4)^2 + 9}$$

$$= \frac{s - 4}{s^2 - 8s + 16 + 9}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{e^{4t} \cdot \sin 3t\} = \frac{s - 4}{s^2 - 8s + 25}$$

ทฤษฎีที่ 10.4.3 คุณสมบัติการเลื่อนข้อที่ 2 (Second shifting property)

กำหนดให้ฟังก์ชัน f(t) เป็นฟังก์ชันที่สามารถแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$

และ $g(t) = \begin{cases} F(t - \underline{a}) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$

จะได้ $\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as} . F(s)$

กล่าวคือ $\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)$ แล้วคูณด้วย e^{-as}

ตัวอย่างที่ 10.10 จงหาค่า $\mathscr{L}\{t^3\}$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันสำหรับการแปลงลาปลาซ

$$g(t) = \begin{cases} (t - 2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

วิธีทำ จากทฤษฎีที่ 10.4.3

$$\mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} = F(s)$$

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as} \cdot F(s) = e^{-2s} \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

ตัวอย่างที่ 10.11 จงหาค่า $\mathscr{L}\{f(t)\}$ ถ้า $f(t) = \begin{cases} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right), & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & , t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

วิธีที่ 1

$$\mathscr{L}\{t(t)\} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{-st} \cdot (0)dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\infty} e^{-st} \cdot \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)} \cos t \, dt$$

ดังนั้น $\mathscr{L}\{f(t)\} = e^{\frac{-2\pi}{3}} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \cos t \, dt = \dfrac{s \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}s}}{s^2 + 1}$

วิธีที่ 2 จากตารางที่ 10.3

$$\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1} = F(s)$$ จาก $g(t) = f(t - a)$ จะได้

ถ้า $\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as} \cdot F(s)$

ดังนั้น $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{s \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}s}}{s^2 + 1}$

5.	sin at	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
6.	cos at	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
7.	sinh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > \lvert a \rvert$
8.	cos h at	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > \lvert a \rvert$

ทฤษฎีที่ 10.4.4 คุณสมบัติการเปลี่ยนสเกล (Change of scale property)

กำหนดให้ฟังก์ชัน f(t) เป็นฟังก์ชันที่สามารถแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

พิสูจน์

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt = F(s)$$

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(at)dt$$

กำหนดให้ $u = at$ ดังนั้นจะได้

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} \cdot f(u) d\frac{u}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int e^{\left(\frac{-s}{a}\right)u} \cdot f(u)du$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

ตัวอย่างที่ 10.12 จงหาค่า $\mathscr{L}\{\cos 2t\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} = F(s)$$

$$\mathscr{L}\{\cos 2t\} = \frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s/2}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{\frac{s^2}{4}+\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4s}{s^2+4}$$

$$\therefore\ \mathscr{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$$

ทฤษฎีที่ 10.4.5 การคูณด้วย t^n (Multiplycation by t^n) เมื่อ $n = 1, 2, 3 \ldots n$

กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น

ถ้า	$\mathscr{L}\{f(t)\}$	$=$	$F(s)$	แล้ว
	$\mathscr{L}\{t^n \cdot f(t)\}$	$=$	$(-1)^n \cdot F^{(n)}(S)$	

กล่าวคือ $F^{(n)}(s)$ หมายถึง หาอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $F(s)$

พิสูจน์

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)dt = F(s)$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st}\cdot f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\cdot\{-t\cdot f(t)\}dt$$

$$= \mathscr{L}\{-t\cdot f(t)\}$$

$$= -\mathscr{L}\{t\cdot f(t)\}$$

ดังนั้น $\boxed{\mathscr{L}\{t\cdot t(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}F(s)}$

ตัวอย่างที่ 10.13 จงหาค่า $\mathscr{L}\{t \sin at\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathscr{L}\{t \sin at\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)$$

$$= (-1)\left\{\frac{(s^2 + a^2)\frac{da}{ds} - a \cdot \frac{d}{ds}(s^2 + a^2)}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(-1)(-a)(2s)}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

ตัวอย่างที่ 10.14 จงหาค่า $\mathscr{L}\{t \cdot e^{2t}\}$

วิธีทำ วิธีที่1 ใช้คุณสมบัติการเลื่อนข้อที่ 1

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{t \cdot e^{2t}\} = \frac{1}{(s - 2)^2}$$

วิธีที่ 2 ใช้คุณสมบัติการคูณด้วย t^n

$$\mathscr{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{(s - 2)}$$

$$\mathscr{L}\{t \cdot e^{2t}\} = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s - 2}\right)$$

$$= (-1)\left\{\frac{(s - 2)\frac{d1}{ds} - 1 \cdot \frac{d}{ds}(s - 2)}{(s - 2)^2}\right\}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{t . e^{2t}\} = \frac{(-1)(-1)}{(s - 2)^2} = \frac{1}{(s - 2)^2}$$

ตัวอย่างที่ 10.15 จงหาค่า $\int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot \cos 3t\, dt$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2 + 9}$$

แต่ $$\mathscr{L}\{\cos 3t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} . \cos 3t\, dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot \cos 3t\, dt = \frac{2}{2^2 + 9} = \frac{2}{13}$$

ตัวอย่างที่ 10.16 จงหาค่า $\int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot t \cos t\, dt$

วิธีทำ $\mathscr{L}\{t \cdot \cos t\}$ ก่อนแล้วจึงแทนค่า s

$$\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\therefore \mathscr{L}\{t \cos t\} = (-1) \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right)$$

$$= (-1)\left\{\frac{(s^2 + 1)\frac{ds}{ds} - s \cdot \frac{d}{ds}(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^2}\right\}$$

$$= (-1)\left\{\frac{(s^2 + 1) - 2s^2}{(s^2 + 1)^2}\right\}$$

$$= \frac{-s^2 - 1 + 2s^2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot t \cos t\, dt = \frac{(2)^2 - 1}{[(2)^2 + 1]^2} = \frac{3}{25}$$

ทฤษฎีที่ 10.4.6 การหารด้วย t (Division by t)

กำหนดให้ฟังก์ชัน f(t) เป็นฟังก์ชันที่สามารถแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(s)ds$$

ตัวอย่างที่ 10.17 จงหาค่า $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}\{\sin t\} = \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore \mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds$$

จากสูตรอินทิเกรท $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$ ดังนั้นจะได้

$$= \tan^{-1} u\Big|_s^\infty$$

$$= (\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}s)$$

$\tan^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s\right)$$

ถ้าแทน s = 1 จะได้

$$\therefore \mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

ทฤษฎีที่ 10.4.7 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Laplace transform of derivatives) ถ้า $f(t), f'(t), f''(t) \ldots f^{(n-1)}(t)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง (o, ∞) และ $f^{(n)}(t)$ มีความต่อเนื่องบนช่วงใดๆ และ $f^{(n-1)}(t) = o(e^{\alpha t})$ แล้ว

$$\boxed{\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}f(o) - s^{n-2}f'(o) - s^{n-3}f''(o) - \ldots - f^{(n-1)}(o)}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $f'(t) = \frac{d}{dt}f(t)$

และ $f''(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t)$

ดังนั้น $\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t)dt$

อินทิเกรตเป็นส่วนๆ จะได้

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \{e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt \\
&= -f(o) + s\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt \\
&= s \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} - f(o) \\
&= S \cdot F(s) - f(o)
\end{aligned}$$

และถ้าหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของสมการจะได้

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= s \cdot \mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(o) \\
&= s\{s \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} - f(o)\} - f'(o) \\
&= s^2 \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} - s \,.\, f(o) - f'(o)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(o) - f'(o)$

และ ถ้าหาอนุพันธ์ลำดับที่ n จะได้

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot \mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1} \cdot f(o) - s^{n-2} \cdot f'(o) - s^{n-3} \cdot f''(o) \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

ตัวอย่างที่ ถ้า $f(t) = \cos 3t$ จงหา $\mathscr{L}[f'(t)]$

วิธีทำ $f(t) = \cos 3t$

ที่ $t=0$ ดังนั้น $f(0) = \cos(3\times 0) = \cos 0 = 1$

$$f(t) = \cos 3t$$

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+9} = F(s)$$

จากสมการที่ (1.42)

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}(\cos 3t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$= s \times \frac{s}{s^2+9} - 1$$

$$= \frac{s^2}{s^2+9} - 1$$

$$= \frac{s^2 - (s^2+9)}{s^2+9}$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}(\cos 3t)\right] = \frac{s^2 - s^2 - 9}{s^2 + 9}$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}[f'(t)] = \frac{-9}{s^2+9}$$ **ตอบ**

หรือ $f(t) = \cos 3t$

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\} = f'(t) = \frac{d}{dt}(\cos 3t) = -3\sin 3t$$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \mathscr{L}[-3\sin 3t] = -3\mathscr{L}[\sin 3t]$$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = -3 \times \frac{3}{s^2+9}$$

$$= \frac{-9}{s^2+9}$$

ทฤษฎีที่ 10.4.8 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล (Laplace transform of integrals)

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

$$\mathscr{L}\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{F(s)}{s}, \quad s > 0$$

ตัวอย่างที่ 10.21 จงหา $\mathscr{L}\{\int_0^t \sin 2t\, dt\}$

วิธีทำ จาก $\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \dfrac{2}{s^2 + 4}$

ดังนั้น $\mathscr{L}\{\int_0^t \sin 2t\, dt\} = \dfrac{2}{s(s^2 + 4)}$

ตัวอย่างที่ 10.22 จงหา $\mathscr{L}\{\int_0^t \cosh 2t\, dt\}$

วิธีทำ จาก $\mathscr{L}\{\cosh 2t\} = \dfrac{s}{s^2 - 4}$

ดังนั้น $\mathscr{L}\{\int_0^t \cosh 2t\} = \dfrac{s}{s(s^2 - 4)}$
