10.7 การแปลงผกผันลาปลาซ (Inverse laplace transforms)

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f(t) จะได้ผล คือ F(s) การแปลงผกผัน**ลาปลาซ** หมายถึง การแปลงฟังก์ชัน f(t) เมื่อทราบผลของ F(s) แล้ว

นิยามการแปลงผกผันลาปลาซ

(Definition of inverse laplace transform)

ถ้า $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ แล้ว

ดังนั้น การแปลงผกผันของ F(s) จะเป็นผลของ f(t) จะเขียนแทนด้วย

$$\boxed{f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

ตารางการ **Inverse** ของบาง **Function**

$\overline{f}(s)$	$\mathscr{L}^{-1}\{\overline{f}(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0,1,2,3,\ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างเช่น

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

ดังนั้น $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$

หรือ $\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$

ดังนั้น $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}$

การหาผลการแปลงผกผันลาปลาซ
(Finding inverse laplace transforms)

การแปลงผกผันลาปลาซของฟังก์ชันสามารถใช้ตารางที่ 10.3 ซึ่งการแปลงลาปลาซจะแปลงจากตารางด้านซ้ายมือ $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ ดังนั้น

การแปลงผกผันลาปลาซจะแปลงจากตารางด้านขวามือ F(s) เป็น f(t)

ดังนั้น จะได้ $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างที่ 10.31 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\}$

วิธีทำ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\} = \sin 5t$

ตัวอย่างที่ 10.32 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\} = 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= 3e^{2t}$$

คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของการแปลงผกผันลาปลาซ

(Some important properties of Inverse Laplace Transforms)

คุณสมบัติการแปลงผกผันลาปลาซจะเป็นผลมาจากการแปลงลาปลาซในบทที่ 10.4 ดังจะกล่าวถึงต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 10.7.1 คุณสมบัติเชิงเส้น (Linearity property)

ถ้า C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ (constants) และ

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \text{ และ } \mathcal{L}\{f_2(s)\} = F_2(s)$$

ดังนั้น

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{C_1F_1(s) + C_2F_2(s)\} = C_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + C_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{C_1f_1(t) + C_2f_2(t)\} &= C_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ &= C_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + C_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10.33 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} \\ &\quad + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\boxed{\frac{1}{S^2+2^2}}\right\} \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \boxed{5\times\frac{\sin 2t}{2}} \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \boxed{\frac{5}{2}\times\sin 2t}\end{aligned}$$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างที่ 10.34 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4}{s^3}\right\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4}{s^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^3}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\}$$

$$= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$$

$$= 3t + \boxed{4\times\frac{t^2}{2!}}$$

$$= 3t + 2t^2$$

$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}}$ $n = 0,1,2,3,...$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}

ตัวอย่างที่ 10.35 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4+3s}{4s^2-16}\right\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4+3s}{4s^2-16}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2-16}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{4s^2-16}\right\}$$

$$= \frac{4}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-\frac{16}{4}}\right\} + \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-\frac{16}{4}}\right\}$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\} + \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-(2)^2}\right\} + \frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-(2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{3}{4}\cosh 2t$$

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ทฤษฎีที่ 10.7.2 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 1 (First shifting property)

ถ้า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ แล้ว

ดังนั้น $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\cdot f(t)$

นั่นคือ

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\,\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

ตัวอย่างที่ 10.36 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^4}\right\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} = e^{2t}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{3!}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\} = \frac{e^{2t}t^3}{6}$$

$\dfrac{1}{s}$	1
$\dfrac{1}{s^2}$	t
$\dfrac{1}{s^{n+1}}$ $n = 0,1,2,3,\ldots$	$\dfrac{t^n}{n!}$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}

ตัวอย่างที่ 10.37 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s+2)^2+3}\right\}$

วิธีทำ

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+3}\right\} = 2e^{-2t}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\}$$

$$= \frac{2e^{-2t}}{\sqrt{3}}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$= \frac{2e^{-2t}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t$$

$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ตัวอย่างที่ 10.38 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+5}\right\}$

วิธีทำ ทำตัวส่วนให้อยู่ในรูป F(s - a) จะได้

$$s^2 - 2s + 5 = (s-1)^2 + 4$$

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$

$$= e^t \mathcal{L} \left\{\frac{1}{s^2+(2)^2}\right\}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$= \frac{1}{2} e^t \sin 2t$$

$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ทฤษฎีที่ 10.7.3 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 2 (Second shifting property)

ถ้า $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ แล้ว

$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u_a(t)$ เมื่อ $a \geq 0$

หรือ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$

ตัวอย่างที่ 10.39 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s\,e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$

วิธีทำ เลื่อน e^{-3s} จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\,e^{-3s}}{s^2+4}\right\} = \cos 2\{t-3)u_3\cancel{(t)}$$

ตัวอย่างที่ 10.40 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)e^{-5s}}{s^2+2s+1}\right\}$

วิธีทำ เลื่อน e^{-5s} จะได้

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{s^2+2s+1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)^2}}\right\} \quad \boxed{\frac{1}{(s+1)}}$$

$$= e^{t}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = e^{t}$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-5s}}{s^2+2s+1}\right\} = e^{t}$$

$$f(t) = e^{t} = e^{(t-5)}$$

$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}}$ $n=0,1,2,3,\ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}

ทฤษฎีที่ 10.7.4 การแปลงผกผันลาปลาซของอนุพันธ์ (Inverse Laplace transform of derivatives)

ถ้า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ แล้ว

$$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$$

ตัวอย่างที่ 10.41 ถ้า $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ จงหา $\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}$

วิธีทำ $\because \quad \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$

และ $\quad \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \dfrac{-2s}{(s^2+1)^2} = F'(s)$

$\therefore$ จากสมการที่ (2.8)

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$= (-1)^1 t^1 \sin t$$

ดังนั้น $\quad \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = -t\sin t$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}t\cdot\sin t$$ **ตอบ**

$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ทฤษฎีที่ 10.7.5 การแปลงผกผันลาปลาซของอินทิกรัล (Inverse Laplace tranfrom of integrals)

ถ้า $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ แล้ว

$$\mathcal{L}^{-1}\{\int_s^\infty f(s)ds\} = \frac{f(t)}{t}$$

ตัวอย่างที่ 10.42 จงหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{s(s+1)}\, ds\right\}$

วิธีทำ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ แยกออกเป็นเศษส่วนย่อย จะได้ F(s)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= 1-e^{-t} = f(t)$$

จากทฤษฎีที่ 10.7.5

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty (s)ds\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

ดังนั้น $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{s(s+1)}\, ds\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$

ทฤษฎีที่ 10.7.6 ทฤษฎีของคอนโวลูชั่น (Convolution Theorem)

ทฤษฎีของคอนโวลูชั่นเป็นวิธีหนึ่งจากคุณสมบัติการแปลงผกผันลาปลาซที่ได้กล่าวมาแล้ว และการแปลงผกผันลาปลาซที่อยู่ในรูปผลคูณ สามารถใช้ทฤษฎีของคอนโวลูชั่น กล่าวคือ

ถ้า $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ และ $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ แล้ว

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)\, du = f*g$$

$f*g$ เรียกว่า คอนโวลูชั่นของ f และ g

และ $f*g = g*f$ จะพิสูจน์ได้ ดังนี้

พิสูจน์ ถ้า $t-u = v$ หรือ $u = t-v$

$$\begin{aligned} f*g &= \int_0^t f(u)g(t-u)du \\ &= \int_0^t f(t-v)g(v)dv \\ &= \int_0^t g(v)f(t-v)dv \\ &= g*f \end{aligned}$$

ดังนั้น $f*g = g*f$

ตัวอย่างที่ 10.43 จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ โดยใช้ทฤษฎีของคอนโวลูชั่น

วิธีทำ $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ แยกเป็นเศษส่วนย่อยได้ คือ

$$\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2} \text{ ดังนั้น}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at \text{ และ } \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีของคอนโวลูชั่น จะได้

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \int_0^t \cos au\cdot\frac{\sin a(t-u)}{a}\,du$$

ดังนั้น จากทฤษฎีของคอนโวลูชั่น จะได้

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \int_0^t \cos au\cdot\frac{\sin a(t-u)}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t (\cos au)(\sin at\cos au - \cos at\sin au)du$$

$$= \frac{1}{a}\sin at\int_0^t \cos^2 au\,du - \frac{1}{a}\cos at\int_0^t \sin au\cos au\,du$$

$$= \frac{1}{a}\sin at\int_0^t\left(\frac{1+\cos 2au}{2}\right)du - \frac{1}{a}\cos at\int_0^t\frac{\sin 2au}{2}du$$

$$= \frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a}\right) - \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin at\cos at}{2a}\right) - \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right)$$

$$= \frac{t\sin at}{2a}$$

ทฤษฎีที่ 10.7.7 เศษส่วนย่อย (Partial fractions)

การหาผลแปลงผกผันลาปลาซที่อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function) ของ s จะเขียนได้ คือ

$$F(s) = \frac{P(S)}{Q(S)}$$

โดยที่ P(S) และ Q(S) เป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ของ S และ P(S) มีดีกรีน้อยกว่า Q(S) สามารถแยกตัวประกอบได้

ในรูปแบบ $\frac{A}{(as+b)^r}$ หรือ $\frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$ เมื่อ r = 1, 2, 3...

เราสามารถแยก F(s) เป็นเศษส่วนย่อยได้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 10.44 จงแยกส่วนย่อยของ $\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3}$

วิธีทำ $$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{(2s+1)}$$

ตัวอย่างที่ 10.45 จงแยกเศษส่วนย่อยของ $\frac{3s^2-4s+2}{(s^2-2s+4)^2(s-5)}$

วิธีทำ $$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$$

ในหาค่าคงที่ A, B, C... จะสามารถหาได้โดยวิธีต่อไปนี้

1. โดยวิธีลิมิต (ใช้เฉพาะ Q(s) อยู่ในรูป $(as+b)^r$ จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟคเตอร์กำลังหนึ่ง ซึ่งไม่เป็นแฟกเตอร์ซ้ำ

2. โดยวิธีกำหนดค่า (s) จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่งซึ่งซ้ำ หรือเป็นแฟกเตอร์กำลังหนึ่ง ปนกับแฟกเตอร์กำลังสอง

3. โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะใช้วิธีนี้เมื่อส่วนเป็นแฟกเตอร์กำลังสองทั้งหมดหรือ เป็นแฟคเตอร์กำลังหนึ่งทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 10.46 จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 7}{S^2 - 2S - 3}\right\}$

วิธีทำ จากส่วน $s^2 - 2s - 3 = (s - 3)(s + 1)$ ดังนั้น

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{S^2 - 2S - 3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{(S - 3)(S + 1)}\right\}$$ แยกเศษส่วนย่อยได้

$$\frac{3S + 7}{(S - 3)(S + 1)} = \frac{A}{S - 3} + \frac{B}{S + 1}$$

วิธีที่ 1 หาค่า A, B โดยวิธีลิมิต จะได้

$$A = \lim_{S\to 3}\left\{\frac{3S + 7}{(S + 1)}\right\} = \frac{16}{4} = 4$$

$$B = \lim_{S\to -1}\left\{\frac{3S + 7}{(S - 3)}\right\} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3S + 7}{(S^2 - 2S - 3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{S - 3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S + 1}\right\}$$

$$= 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S - 3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S + 1}\right\}$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

วิธีที่ 2 หาค่า A, B โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\frac{3S+7}{(S-3)(S+1)} = \frac{A}{S-3} + \frac{B}{S+1}$$

นำ (S - 3)(S + 1) คูณตลอด จะได้

$$\begin{aligned} 3s + 7 &= A(S+1) + B(s-3) \\ &= AS + A + BS - 3B \\ &= (A+B)S + (A-3B) \\ 3S &= (A+B)S \quad \text{.......... 1} \\ 7 &= (A-3B) \quad \text{.......... 2} \end{aligned}$$

นำ 1 - 2 จะได้ $-4 = B - (-3B) = 4B$

ดังนั้น $B = \frac{-4}{4} = -1$

นำ $B = -1$ แทนใน 1 จะได้

$3 = (A - 1)$

ดังนั้น $A = 3 + 1 = 4$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3S+7}{(S^2-2S-3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{S-3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\}$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

หมายเหตุ จะเห็นว่าวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 10.47 จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5S^2-15S-11}{(S+1)(S-2)^3}\right\}$

วิธีทำ จากโจทย์แยกเป็นเศษส่วนย่อย คือ

$$\frac{5S^2-15S-11}{(S+1)(S-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

หาค่า A, B โดยวิธีลิมิต ดังนั้น

$$A = \lim_{S\to -1}\left\{\frac{5S^2-15S-11}{(S-2)^3}\right\} = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{S\to 2}\left\{\frac{5S^2-15S-11}{(S+1)}\right\} = -\frac{21}{3} = -7$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}$ และ $B = -7$ ลงในสมการเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{5S^2-15S-11}{(S+1)(S-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{(-7)}{(S+2)^3} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)}$$

หาค่า C, D โดยวิธีกำหนดค่า s = 0 และ s = 1 ในสมการจะได้

แทน $s = 0,\ \frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{D}{2}$ 1

$$\frac{33 + 8 - 21}{24} = \frac{6C - 12D}{24}$$

$$20 = 6C - 12D$$

ดังนั้น $10 = 3C - 6D$ 2

แทน $s = 1,\ \frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - D$ 3

$$\frac{21}{2} = \frac{-1 + 42 + 6C - 6D}{6}$$

$$\frac{21}{2} = \frac{41 + 6C - 6D}{6}$$

$$\frac{63 - 41}{6} = \frac{6C - 6D}{6}$$

$$22 = 6C - 6D$$

หรือ $11 = 3C - 3D$ 4

นำ 2 - 4 จะได้

$$-1 = -3D$$

$$\therefore D = \frac{1}{3}$$

นำ $D = \frac{1}{3}$ แทนใน 4 จะได้

$$11 = 3C - (3)\frac{1}{3}$$

$$11 = 3C - 1$$

$$C = \frac{12}{3} = 4$$

แทนค่า $A = -\frac{1}{3}$, $B = -7$, $C = \frac{1}{3}$ และ $D = 4$ จะได้

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5S^2 - 15S - 11}{(S + 1)(S - 2)^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s + 1} + \frac{-7}{(S - 2)^3} + \frac{4}{(s - 2)^2} + \frac{1/3}{(s - 2)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} + 4\,te^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

ตัวอย่างที่ 10.48 จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)}\right\}$

วิธีทำ จากโจทย์แยกเป็นเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)} = \frac{A}{(S + 2)} + \frac{BS + C}{(S^2 + 2)}$$

หาค่า A, B โดยวิธีกำหนดค่า

นำ $(s + 2)(s^2 + 2)$ คูณตลอดจะได้

$$7s^2 + 8s + 6 = A(S^2 + 2) + BS + C(S + 2)$$

กำหนดให้ $S = -2$ จะได้

$$18 = 6A \quad \therefore \; A = 3$$

กำหนดให้ $S = 0$

$$6 = 2A + 2C$$

$$6 = 6 + 2C \quad \therefore \; C = 0$$

กำหนดให้ $S = 1$

$$21 = 3A + 3B$$

$$= 9 + 3B$$

$$21 - 9 = 3B \quad \therefore \; B = 4$$

แทนค่า A, B, C ลงในสมการเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)} = \frac{3}{(S + 2)} + \frac{4S}{(S^2 + 2)}$$

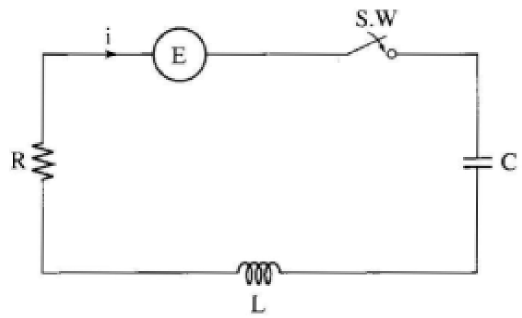
$$\therefore \; \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7S^2 + 8S + 6}{(S + 2)(S^2 + 2)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(S + 2)} + \frac{4S}{(S^2 + 2)}\right\}$$

$$= 3e^{-2t} + 4\cos\sqrt{2}\,t$$

10.8 การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซกับวงจรไฟฟ้า

การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซกับวงจรไฟฟ้า เป็นวิธีการหนึ่งที่ช่วยให้การแก้ปัญหาทางไฟฟ้าให้ง่ายขึ้น เช่น วงจรไฟฟ้าดังรูปที่ 10.8 เป็นวงจรอนุกรม ซึ่งวงจรไฟฟ้าจะประกอบด้วย

1. แหล่งกำเนิดไฟฟ้า (Electromotive force) หรือ e.m.f ใช้สัญลักษณ์ E มีหน่วยเป็นโวลต์ (Volt)
2. ตัวความต้านทานไฟฟ้า (Resistor) ใช้สัญลักษณ์ R มีหน่วยเป็นโอห์ม (Ohm)
3. ตัวเหนียวนำไฟฟ้า (Inductor) ใช้สัญลักษณ์ L มีหน่วยเป็นเฮนรี่ (Henrys)
4. ตัวเก็บประจุไฟฟ้า (Capacitor) ใช้สัญลักษณ์ C มีหน่วยเป็นฟารัด (Farads)



รูปที่ 10.8 *วงจรอนุกรม RLC*

จากวงจรเมื่อปิดสวิตช์ S.W จะทำให้วงจรครบวงจรไฟฟ้า ประจุไฟฟ้า q มีหน่วยเป็นคูลอมบ์ (Coulomb) เคลื่อนที่ไปยังตัวเก็บประจุไฟฟ้า (C) อัตราการเปลี่ยนแปลงของประจุเขียนแทนด้วย $\frac{dq}{dt} = i(t)$ เรียกว่า กระแสไฟฟ้ามีหน่วยเป็น แอมแปร์ (Ampare)

จากกฎของเคอร์ชอฟสำหรับแรงเคลื่อนไฟฟ้า (kirchhoff's Voltage Law) ใช้กับวงจรอนุกรม RLC ดังรูปที่ 10.8 จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt = E \qquad \text{..........} \ 1$$

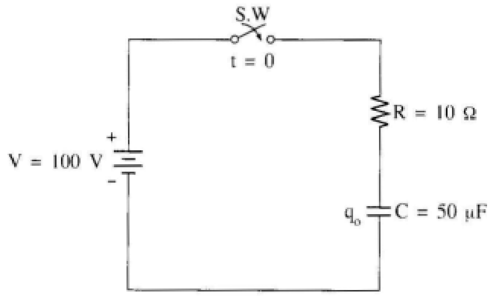
เนื่องจาก i = I(S) ดังนั้น สมการที่ 1 จะได้

$$\mathscr{L}\{Ri\} + \mathscr{L}\left\{L\frac{di}{dt}\right\} + \mathscr{L}\left\{\frac{1}{c}\int i\,dt\right\} = \mathscr{L}\{E\} \qquad \text{..........} \ 2$$

จะได้

$$RI(S) + LS\,I(S) + \frac{I(S)}{CS} = \frac{E}{S} \qquad \text{..........} \ 3$$

ตัวอย่างที่ 1 ในวงจร RC ดังรูปที่ 10.9 ค่าคาพาซิเตอร์มีค่า Initial charge $q_o = (-2{,}500 \times 10^{-6})$ คูลอมป์และปิดสวิตซ์ที่เวลา t = 0 โดยจ่ายแรงเคลื่อนไฟฟ้า v = 100 โวลต์ จงหาค่ากระแสในวงจรนี้



รูปที่ 10.9

วิธีทำ เมื่อปิดสวิตซ์ จะได้สมการ คือ

$$Ri + \frac{1}{c}\int i\,dt = v \qquad \text{.......... 1}$$

$$\mathscr{L}\{Ri\} + \mathscr{L}\left\{\frac{1}{c}\int i\,dt\right\} = \mathscr{L}\{v\}$$

จากสมการที่ 1 (Taking the Laplace transform) จะได้

$$RI(S) + \frac{1}{c}\left(\frac{I(S)}{S} + \frac{q_o}{S}\right) = \frac{V}{S} \qquad \text{.......... 2}$$

$$10I(S) + (2 \times 10^4)\left(\frac{I(S)}{S} + \frac{q_o}{S}\right) = \frac{100}{S}$$

เมื่อสวิตซ์ปิดวงจร ประจุ q_o มีขั้วลบที่เพลทบน ดังนั้นจะได้

R C

$$10I(S) + (2 \times 10^4) \cdot \frac{I(S)}{S} + \frac{(2 \times 10^4)(-2500 \times 10^{-6})}{S} = \frac{100}{S}$$

$$\left(\frac{10S + (2 \times 10^4)}{S}\right)I(S) - \frac{50}{S} = \frac{100}{S}$$

$$\left[\frac{10S + (2 \times 10^4)}{S}\right]I(S) = \frac{150}{S}$$

ดังนั้น $I(S) = \dfrac{15}{S + (2 \times 10^3)}$

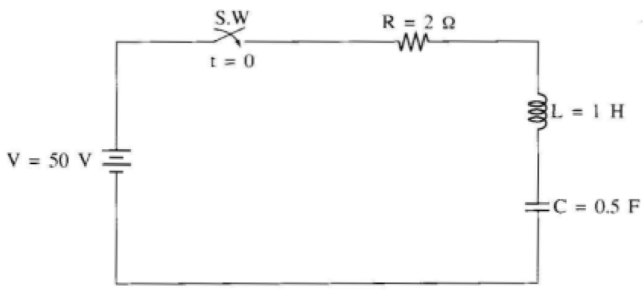
ถ้าแปลงผกผันลาปลาซสมการ **I(S) จะได้**

$$\mathscr{L}^{-1}\{I(S)\} = i(t)$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{15}{S + (2 \times 10^3)}\right\} = 15\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S + (2 \times 10^3)}\right\}$$

$$\therefore i(t) = 15e^{-(2 \times 10^3)t}$$

ตัวอย่างที่ 2 ในวงจร RLC ดังรูปที่ 10.10 ไม่มีค่าที่คาพาซิเตอร์ เมื่อเวลา t = 0 ปิดสวิตช์ จงหาผลของกระแส i(t)



รูปที่ 10.10 วงจร *RLC*

วิธีทำ จากวงจร RLC ดังรูป จะได้สมการ

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad \text{.......... 1}$$

แปลงลาปลาซ (Take Laplace) ในสมการที่ 1 จะได้

$$\mathscr{L}\{Ri\} + \mathscr{L}\left\{L\frac{di}{dt}\right\} + \mathscr{L}\left\{\frac{1}{C}\int i\,dt\right\} = \mathscr{L}\{V\}$$

$$RI(S) + LSI(S) - Li(o) + \frac{1}{C}\left(\frac{I(S)}{S} + \frac{q_o}{S}\right) = \frac{V}{S}$$

$$RI(S) + LSI(S) - Li(o) + \frac{I(S)}{CS} + \frac{q_o}{S} = \frac{V}{S} \qquad \text{.......... 2}$$

เมื่อปิดสวิตช์ t = 0, ค่า Initial condition จะได้ค่า

; $Li(o) = o$ และ $\frac{q_o}{S} = 0$ ดังนั้น จะได้สมการ

$$RI(S) + LSI(S) + \frac{I(S)}{CS} = \frac{V}{S} \qquad \text{.......... } 3$$

แทนค่า RLC ในสมการที่ 3 จะได้

$$2I(S) + SI(S) + \frac{1}{0.5S}I(S) = \frac{V}{S} \qquad \text{.......... } 4$$

หรือ

$$I(S)\left[2 + S + \frac{1}{0.5S}\right] = \frac{50}{S}$$

$$\therefore \; I(S) = \frac{50}{(S^2 + 2S + 2)} \qquad \text{..... } 5$$

ดังนั้นกระแส i(t) จะทำได้โดยการแปลงผกผันลาปลาซ I(S)

เพราะฉะนั้น $\mathscr{L}^{-1}\{I(S)\} = i(t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{50}{(S^2 + 2S + 2)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{50}{(S + 1)^2 + 1)}\right\}$$

$$= 50\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S + 1)^2 + 1)}\right\}$$

ใช้กฎการเลื่อนข้อที่ 1 จะได้ $= 50\,e^{-1}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^2 + 1}\right\}$

$$= 50\,e^{-t}\sin t$$

ดังนั้น $i(t) = 50\,e^{-t}\sin t$ Amp.