จำนวนเชิงซ้อน:

$$z^2+9=0$$

$$z^2=-9$$

$$z=\pm\sqrt{-9}$$

$$z=\pm\sqrt{-1\times 9}$$

โดย $\sqrt{-1}=i\,,j$

$$\therefore\ z=\pm i3 \text{ หรือ } \pm 3i$$

$$z^2-10z+41=0$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\ b=-10,\ a=1,\ c=41$$

$$\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(1)(41)}}{2}$$

$$\frac{10\pm\sqrt{100-164}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{-64}}{2}$$

$$\frac{10\pm\sqrt{-1\times 64}}{2}=\frac{10\pm i\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm i8}{2}$$

$$\therefore\ z=5\pm j4$$

หรือ $(z-5-j4)(z-5+j4)=0$

รูปทั่วไปของจำนวนเชิงซ้อน

(1)

$$z = a \pm jb$$

หรือ

$$z = x \pm jy$$

x = ส่วนจริง (Real part) ของ z $\rightarrow Re[z]$

y = ส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ของ z $\rightarrow Im[z]$

$z = 4-3i$ $\quad$ $z = \pi i$ $\quad$ $z = 2$

$Re[z] = 4$; $Im[z] = -3$

$Re[z] = 0$

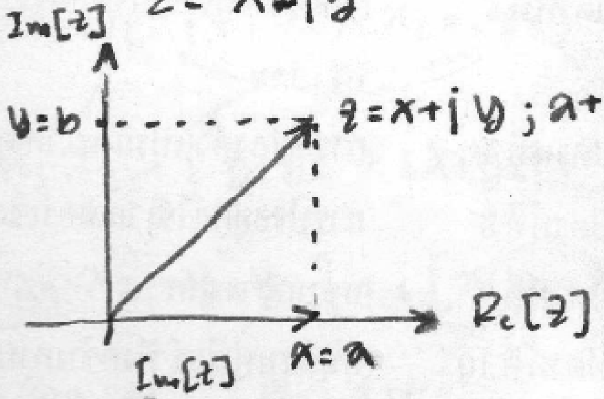
$Im[z] = \pi$

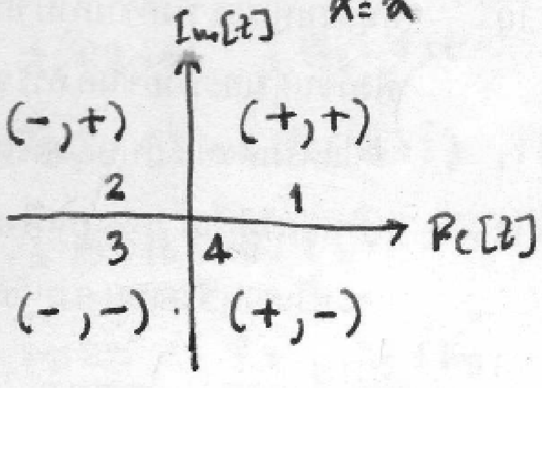
$Re[z] = 2$

$Im[z] = 0$

จำนวนเชิงซ้อนพิกัดฉาก [Rectangular From]

$$z = x \pm jy$$





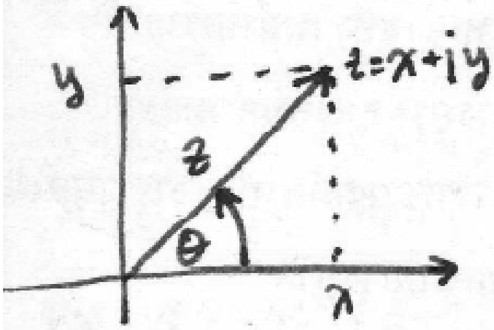
ถ้า $z = 5+j4$ อยู่ใน Q_1

$z = -5+j4$ " Q_2

$z = -5-j4$ " Q_3

$z = 5-j4$ " Q_4

<u>ขนาดของ z</u>



$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

1.2 <u>จำนวนเชิงซ้อนคอนจูเกต</u> [Conjugate]

ถ้า $z = x+jy$

คอนจูเกต z คือ $z^* = x-jy = \bar{z}$

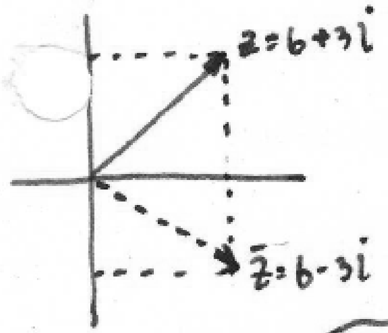
$z = 3+j4 \longrightarrow \bar{z} = z^* = 3-j4$

$z = 3-j4 \longrightarrow \bar{z} = z^* = 3+j4$

$z = -3+j4 \longrightarrow \bar{z} = z^* = -3-j4$

$z = -3-j4 \longrightarrow \bar{z} = z^* = -3+j4$

คอนจูเกตของ z จะมีเครื่องหมายของส่วน $Im[z]$ จะตรงกันข้าม



$z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{\bar{z}} = x + iy$

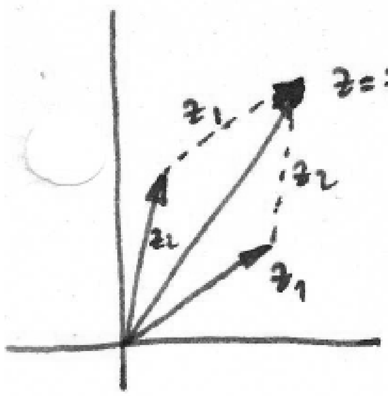
ถ้า $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

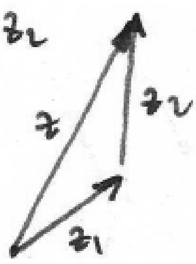
$(x+iy)(x-iy)$ $\quad -i^2 = -[-1] = 1$

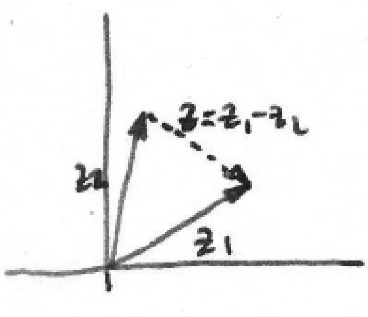
$x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - i^2y^2$

$\therefore z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

1.2 <u>พีชคณิตเชิงซ้อน</u> [+, -, ×, ÷] [พิกัดฉาก]







$z + z_2 = z_1$

$\therefore z = z_1 - z_2$

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 = x_1 + iy_1 = 2+4i$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = 4+i$$

$$\begin{array}{l} z_1 + \\ z_2 \end{array} = \begin{array}{r} x_1 + iy_1 + \\ x_2 + iy_2 \\ \hline (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 2+4i \\ 4+i \\ \hline [2+4]+i[4+1] = 6+i5 \end{array} \leftarrow$$

(2)

การบวก

* นำส่วนจริงรวมกับส่วนจริง
ส่วนจินตภาพรวมกับส่วนจินตภาพ

การลบจำนวนเชิงซ้อน

$$z_1 = x_1 + iy_1 = 2+4i$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = 4+i$$

$$\begin{array}{l} z_1 - \\ z_2 \end{array} = \begin{array}{r} x_1 + iy_1 - \\ -x_2 - iy_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2+4i - \\ -4-i \\ \hline \end{array}$$

เปลี่ยนเครื่องหมาย

$$[x_1-x_2]+i[y_1-y_2] \quad [2-4]+[4-1]i = -2+i3 \leftarrow$$

การลบ

เปลี่ยนเครื่องหมายของตัวลบให้ตรงข้าม
จากนั้นนำส่วนจริงรวมกับส่วนจริง

การคูณ $z_1 = x_1 + iy_1 \; ; \; z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 \cdot x_2 + i^2 y_1 y_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1$$

$$= [x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2] + i[x_1 y_2 + x_2 y_1]$$

$z_1 = 2 + 4i \quad ; \; z_2 = 4 + i$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+4i)(4+i)$$

$$= 8 + 16i + 2i + i^2 4 = 4 + 18i$$

การหาร $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$

การหาร ให้นำคอนจูเกตของตัวหารคูณทั้งเศษและส่วน

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \times \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[x_1 x_2 - y_1 y_2] + i[x_1 y_2 + x_2 y_1]}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{2+4i}{4+i} = \frac{[2+4i]}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{8 + 16i - 2i - i^2 4}{16+1} = \frac{12 + 14i}{17}$$

Ex $(2-3i)(4+2i) = 8-12i+4i-i^2 6$

$= 14-i8$

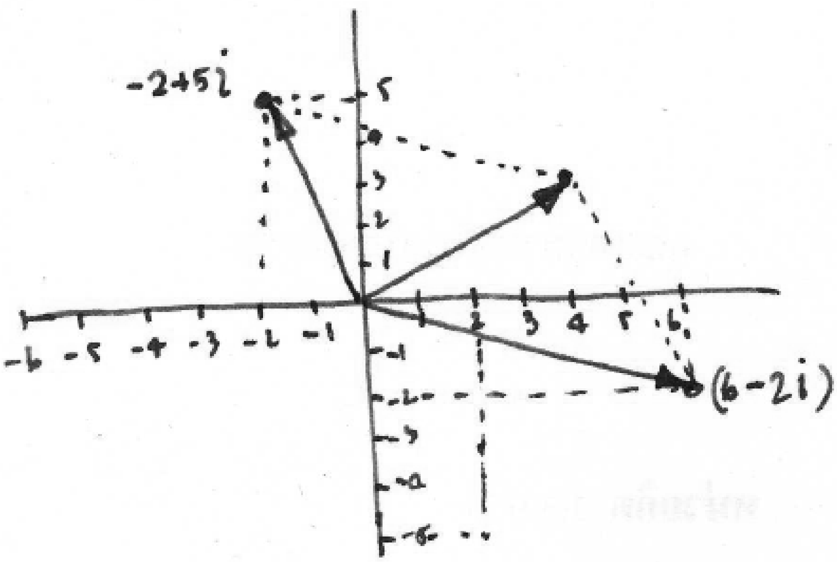
$(2-i)(-3+2i) = -6+3i+4i-i^2 2$

$[5-4i] \quad = (-4+7i)(5-4i)$

$= -20+35i+16i-i^2 28 = 8+51i$

Ex 1.3 $(6-2i)-(2-5i)$ ต้องหาเวกเตอร์

$$\begin{array}{r} 6-2i \\ -\;\; 2-5i \\ \hline 4+3i \end{array}$$



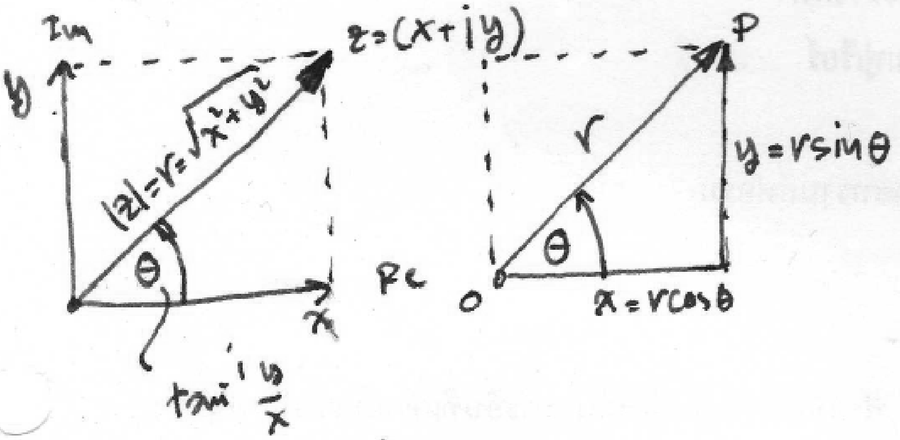
1.5 จำนวนเชิงซ้อนพิกัดขั้ว [Polar Form]

$z = x + jy$ rectan

$z = r\angle\theta \rightarrow$ ~~z=x~~

โดย $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$\therefore z = \sqrt{x^2+y^2} \angle \tan^{-1}\frac{y}{x}$



ดังนั้น $z = x + iy$

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ (ตรีโกณ) trigonometric

หรือ $z = r\angle\theta$ → polar form

r = ค่าสัมบูรณ์ [absolute value] หรือโมดูลัสของ z

θ = อาร์กิวเมนต์ [Argument] arg[z]

$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$

หน่วยเป็นเรเดียน [radian], degree.

Ex $z = 1 + i \rightarrow$ Polar

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{1}{1}\right] = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$\therefore \quad z = \sqrt{2}\left[\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ\right]$$

$$z = \sqrt{2} \angle 45^\circ \; ; \; \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}$$

3

1.5.1 การคูณและหารโพลาร์ฟอร์ม

1.) **การคูณ**

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left[\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin\theta_2 + i^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2\right]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)\right]$$

จาก $\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$

และ $\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \cos\theta_1 \sin\theta_2$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

และ $\therefore \sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

ถ้าให้ $\theta = \theta_1 + \theta_2$

และ $r = r_1 \cdot r_2$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$

หรือ $z_1 z_2 = r\angle\theta \; ; = r_1 \cdot r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$

การคูณใน Polar

นำขนาด คูณกัน และนำมุมบวกกัน

$z_1 = 2 + j3 \qquad z_2 = 4 + j3$

$z_1 \cdot z_2 =$

$$z_1 = \sqrt{2^2+3^2}\,\angle \tan^{-1}\frac{3}{2} \; ; \; z_2 = \sqrt{4^2+3^2}\,\angle \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$r_1 \angle \theta_1 \; ; \; \cancel{r_2} \quad r_2 \angle \theta_2$$

$$z_1 = 3.61\angle 56.31^\circ \qquad ; z_2 = 5\angle 36.87^\circ$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3.61)(5)\angle 56.31 + 36.87^\circ = 18.05\angle 93.18^\circ$$

1. การหาร

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$\cancel{= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 - i}$$

$$= \frac{r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]}{r_2^2[(\cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_2)^2]}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 r_2}{r_2^2}\,\frac{[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)]}{1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

ให้ $r = \frac{r_1}{r_2}$; $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = r\angle\theta = \frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1-\theta_2$$

การหารใน Polar

นำขนาดหารกัน และมุมลบกัน

$z_1 = 2+j3 \quad ; z_2 = 4+j3$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+j3}{4+j3} = \frac{3.61\angle 56.31^\circ}{5\angle 36.87^\circ}$$

$$= \frac{3.61}{5}\angle 56.31^\circ - 36.87^\circ = 0.722\angle 19.44^\circ$$

สรุป

rectan $\quad z = x + jy$

Polar $\quad z = r\angle\theta = \sqrt{x^2+y^2}\angle \tan^{-1}\frac{y}{x}$

trigono $\quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

สังเกต

- การบวก หรือลบ ทำใน rectan จะสะดวก
- การคูณ การหาร ทำใน Polar จะสะดวก.

ตัวอย่างที่ 1 วงจรตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำต่ออนุกรมดังรูปที่ 2 ถ้าตัวต้านทานมีค่า $50\ \Omega$ และ ตัวเหนี่ยวนำมีค่า $0.1\ H$ ต่ออยู่กับแหล่งจ่ายขนาด $220\angle 0^0\ V\ \ 50\ Hz$ จงหา

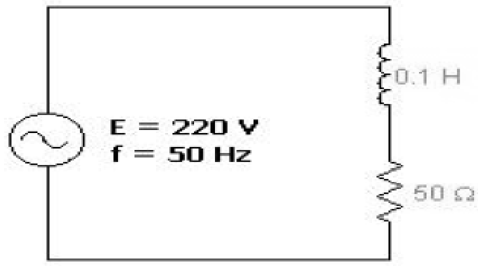
1.1 ความต้านทานเชิงซ้อน

1.2 มุมต่างเฟส

1.3 กระแส

1.4 แรงดันตกคร่อมตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำ

1.5 เขียนเฟสเซอร์ของแรงดันและกระแส



ตัวอย่างที่ 2 วงจรตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำต่ออนุกรมดังรูปที่ 4 ถ้าตัวต้านทานมีค่า $50\ \Omega$ และ ตัวเก็บประจุมีค่า $100\ \mu F$ ต่ออยู่กับแหล่งจ่ายขนาด $220\angle 0^0\ V\ \ 50\ Hz$ จงหา

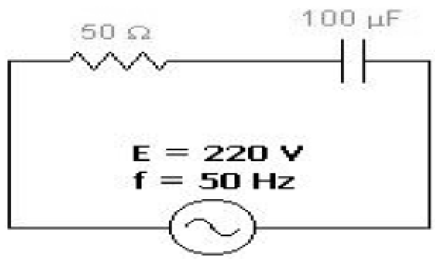
2.1 ความต้านทานเชิงซ้อน

2.2 มุมต่างเฟส

2.3 กระแส

2.4 แรงดันตกคร่อมตัวต้านทานและตัวเก็บประจุ

2.5 เขียนเฟสเซอร์ของแรงดันและกระแส



ตัวอย่างที่ 3 วงจร R-L-C อนุกรม $R = 20\ \Omega$, $L = 0.2\ H$, $C = 150\ \mu F$ ต่ออยู่กับแหล่งจ่าย $220\angle 15^0\ V$, 50 Hz ดังรูปที่ 9 จงหา

3.1 หาค่า I

3.2 พิสูจน์ว่า $E = V_R + V_L + V_C$

3.3 เขียนแผนเฟสเซอร์ของแรงดันและกระแสของวงจร