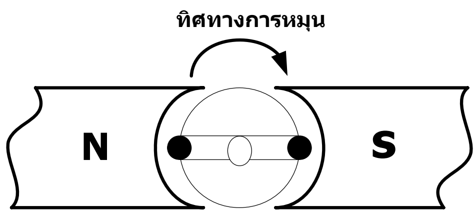
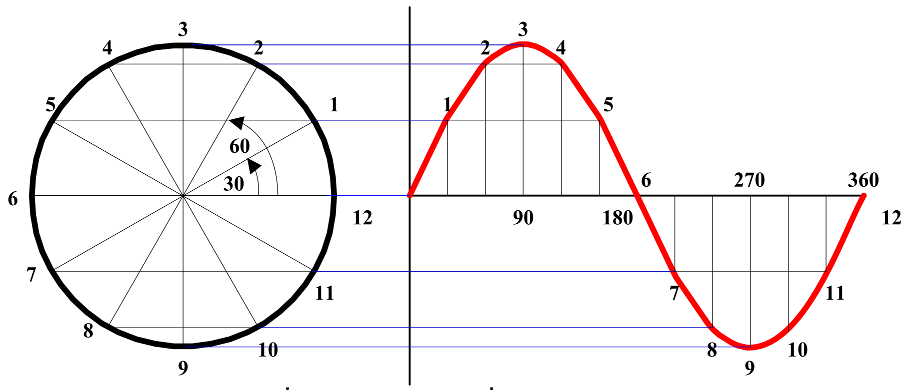
บทที่ 3
วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ
(Alternating Current)

การกำเนิดรูปคลื่นไฟฟ้ากระแสสลับ



รูปที่ 3-1แสดงหลักการทำงานเบื้องต้น

การกำเนิดรูปคลื่นไซน์ (Sine Wave)



รูปที่ 3-2 การเกิดรูปคลื่นไซน์

POINT	*VALUE*	*POINT*	*VALUE*
0	*Sin 0 ^{O} = 0*	*7*	*Sin 210 ^{O} = - 0.5*
1	*Sin 30 ^{O} = 0.5*	*8*	*Sin 240 ^{O} = - 0.866*
2	*Sin 60 ^{O} = 0.866*	*9*	*Sin 270 ^{O} = - 1*
3	*Sin 90 ^{O} = 1*	*10*	*Sin 300 ^{O} = - 0.866*
4	*Sin 120 ^{O} = 0.866*	*11*	*Sin 330 ^{O} = - 0.5*
5	*Sin 150 ^{O} = 0.5*	*12*	*Sin 360 ^{O} = 0*
6	*Sin 180 ^{O} = 0*	-	-

รูป 3-3 แสดงค่าแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับชั่วขณะที่เกิดขึ้นกับรูปคลื่นไซน์ ตามมุมการเคลื่อนที่ต่างๆ ใน 1 รอบของการหมุน

จากจุด 0 องศา จะมีค่าแรงดันชั่วขณะ $e = Em \; Sin\,\theta$

ถ้ากำหนดให้ค่าแรงดันสูงสุด $Em = 1$ หน่วยจะได้ว่า

$e_0 = 1 \; (Sin\, 0^{\circ})$

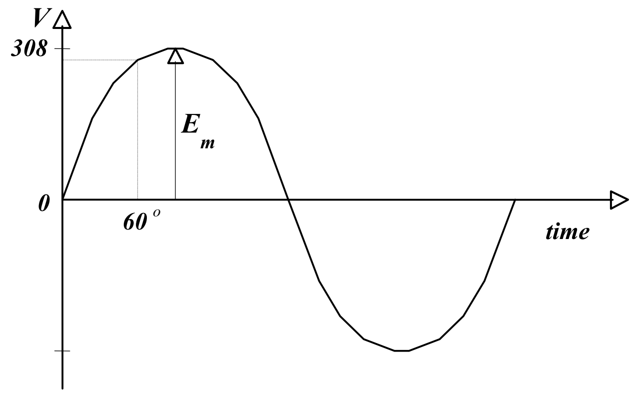
$$= \quad 0 \ V$$

ที่จุด 1 (30 องศา) $\qquad e_{30} = 1 \ (\text{Sin } 30^{\circ})$

$$= \quad 1 \ (0.5)$$

$$= \quad 0.5 \ V$$

<u>ตัวอย่าง 3-1</u> เครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับเครื่องหนึ่งให้แรงดันสูงสุดเท่ากับ 308 โวลท์ ดังรูป จงคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในขณะที่ขดลวดหมุนตัดกับเส้นแรงแม่เหล็กเป็นมุม 60°



วิธีทำ จากสมการ 3-1 $\qquad e = Em \ \text{Sin } \theta$

$$e = 308 \ V \ (\text{Sin } 60^{\circ})$$

$$= 308 \ V \ (0.866)$$

$$= 266.72 \ V.$$

<u>ตอบ</u>

ในทำนองเดียวกันเมื่อจะคำนวณค่ากระแสไฟฟ้าชั่วขณะที่ไหลในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับก็สามารถหาได้จากสมการ 3-2

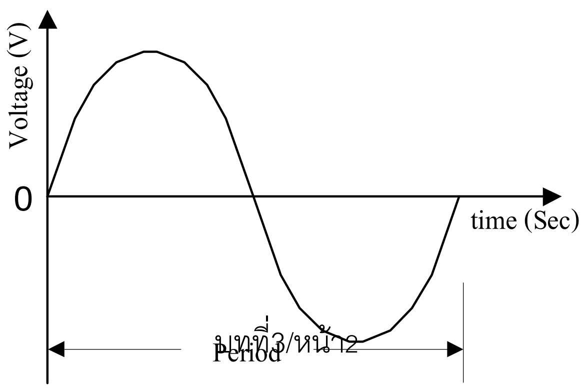
$$i = Im \ \text{Sin } \theta$$

เมื่อ $\quad i$ คือค่ากระแสไฟฟ้าสลับชั่วขณะที่มุม θ ใดๆ

Im คือค่ากระแสไฟฟ้าสูงสุดในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับนั้น

θ คือ มุมมีหน่วยเป็น องศา(degree)

<u>คาบเวลา</u> (Time Period <u>ตัวย่อ T</u>) หมายถึง *ระยะเวลาเป็นวินาทีที่ทำให้รูปคลื่นไซน์เกิดอย่างสมบูรณ์ 1 ไซเกิล* จากรูป 3-2 จะเห็นว่าที่ความถี่ 1 เฮิร์ตซ์ นั้น จะมีคาบเวลา (T) เท่ากับ 1 วินาที นั่นคือสมการ 3-4



$$\text{คาบเวลา } (T) = \frac{\text{วินาที (Second)}}{\text{จำนวนรอบ (Cycle)}} \quad \text{------------------- (3-4)}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 3-3 และ 3-4 จะเห็นว่า T และ f มีความสัมพันธ์กันกล่าวคือ

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{หรือ} \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{--------------------------- (3-5)}$$

<u>ตัวอย่าง 3-3</u> ถ้ามีรูปคลื่นไซน์ 500 ไซเกิล ใน 1 วินาที รูปคลื่นไซน์นี้จะมีคาบเวลาเท่าไร

วิธีทำ

$$f = \frac{500 \text{ Cycle}}{1 \text{ Sec}}$$

$$= 500 \text{ Hz}$$

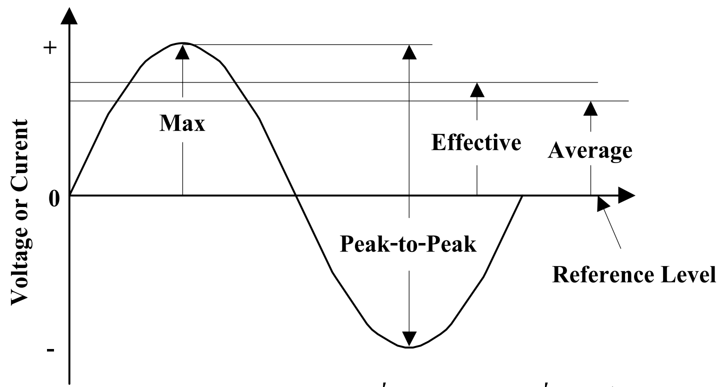
$$\therefore \quad T = \frac{1}{500 \text{ Hz}}$$

$$= 0.002 \text{ Sec}$$

หรือ $T = 2$ mS (milliSec) ***<u>ตอบ</u>***

3.3 ค่าของแรงดันและกระแส

ค่าต่างๆ ที่สำคัญของรูปคลื่นไซน์นอกจากความถี่และคาบเวลานั้นแล้ว ยังมีอีก 4 ค่าคือ *ค่าสูงสุด (Maximum)* *ค่ายอดถึงยอด (Peak-to-Peak)* *ค่าเฉลี่ย (Average)* และ *ค่าใช้งาน (Effective)* พิจารณาจากรูป 3-4



<u>รูป 3-4 แสดงค่าที่สำคัญของรูปคลื่นไซน์</u>

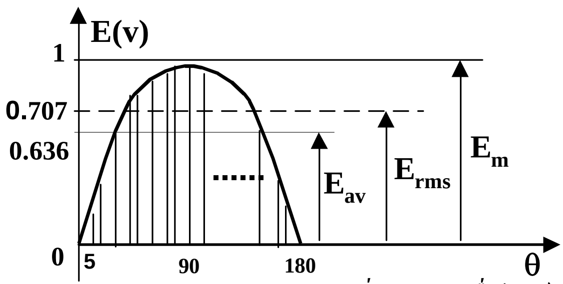
<u>ค่าสูงสุด</u> คือ ขนาดสูงสุดของแรงดันหรือกระแสไฟฟ้าเมื่อวัดจากระดับอ้างอิงจนถึง จุดยอดของรูปคลื่น เมื่อพิจารณาจากสมการแรงดันชั่วขณะ คือ $e = E_m \sin\theta$ จะเห็นว่าค่าสูงสุดจะเกิดได้เมื่อขดลวดตัวนำทำมุม $\theta = 90°$ กับเส้นแรงแม่เหล็ก ดังนี้

$$e = E_m \sin 90 = E_m$$

$$\therefore \quad e = E_m$$

<u>ค่ายอดถึงยอด</u> จากรูป 3-4 คือ ค่าที่วัดจากมุมยอดของรูปคลื่นไซน์ด้านบวกจนถึงจุดยอด*ของรูปคลื่นไซน์ด้านลบ* นั่นคือค่ายอดถึงยอดเท่ากับ 2 เท่าของค่าสูงสุด

<u>ค่าเฉลี่ย</u> คือ ค่าเฉลี่ยของรูปคลื่นไซน์นั้นเราจะพิจารณาเฉพาะด้านใดด้านหนึ่ง คือด้านบวกหรือลบเพียงด้านเดียว เพราะถ้าพิจารณาทั้งไซเกิลจะได้ค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยจึงเป็นการประมาณทางไฟตรง พิจารณาตั้งแต่ 0° ถึง 180°



<u>รูป 3-5 แสดงการหาค่าเฉลี่ยของรูปคลื่นไซน์</u>

จากรูป 3-5 ค่าเฉลี่ยของแรงดัน E หาได้ดังนี้

กำหนดให้ E_{AV} = ค่าเฉลี่ยของรูปคลื่นไซน์

$e_1, e_2 ..... e_n$ = ค่าชั่วขณะที่มุม θ ใดๆ

จะได้ว่า

$$E_{AV} = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n}{n}$$

เมื่อ n = จำนวนส่วนที่แบ่งเพื่อหาค่า e

จากสมการ 3-1 $e = Em \ Sin\,\theta$

ดังนั้น

$$E_{AV} = \frac{E_m Sin\theta_1 + E_m Sin\theta_2 + E_m Sin\theta_3 + ... + E_m Sin\theta_n}{n}$$

$$= \frac{E_m (Sin\theta_1 + Sin\theta_2 + Sin\theta_3 + ... + Sin\theta_n)}{n}$$

สมมติว่ากำหนดแบ่ง n =36 ส่วน นั่นคือ แต่ละมุม θ จะเท่ากับ $^{180}/_{36} = 5^\circ$

จะได้ว่า

$$E_{AV} = \frac{E_m (Sin5 + Sin10 + Sin15 + ... + Sin180)}{36}$$

$$= \frac{22.9 \quad E_m}{36} = 0.636 \ Em$$

สรุปเป็นสูตรหาค่าแรงดันเฉลี่ยรูปคลื่นไซน์ได้ดังสมการ 3-6

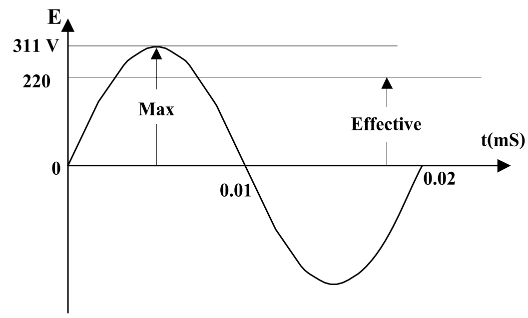
$$\boxed{\begin{aligned} E_{AV} &= 0.636\ Em \\ V_{AV} &= 0.636\ Vm \end{aligned}}$$

หรือ ------------------------------- (3-6)

ในทำนองเดียวกันการหาค่ากระแสเฉลี่ยรูปคลื่นไซน์ก็หาได้ดังสมการ (3-7)

$$I_{AV} = 0.636\ Im \qquad \text{---------------------------------- (3-7)}$$

<u>ค่าแรงดันใช้งาน</u> (Effective Voltage) คือ ค่าที่เครื่องมือวัดทางไฟฟ้าสามารถวัดออกมาได้ ปกติเมื่อนำมิเตอร์ไฟฟ้ากระแสสลับไปวัดแรงดันไฟฟ้าตามบ้านจะอ่านค่าได้ 220 V ซึ่งค่าแรงดันไฟฟ้า 220 V นี้ไม่ใช่ค่าแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับสูงสุดและไม่ใช่ค่าเฉลี่ยของแรงดันด้วย แต่ค่าดังกล่าวนี้จะมีค่าเท่ากับ 0.707 เท่าของแรงดันสูงสุดดังรูป 3-6



<u>รูป 3-6 แสดงรูปคลื่นของแรงดันไฟฟ้าที่วัดค่าได้ 220 V</u>

ค่าแรงดันใช้งานนี้สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$E = 0.707\ Em \qquad \text{----------------------------- (3-8)}$$

ค่าแรงดันใช้งาน E = 0.707 เท่าของ Em นั่นคือเมื่อวัดค่าแรงดันไฟสลับใช้งานได้ 220 V ค่าแรงดันสูงสุดจะเท่ากับ 311.1 V ดังสมการต่อไปนี้

$$220\ V = 0.707\ Em$$

$$Em = \frac{120\ V}{0.707} = 311.1\ V$$

ค่าใช้งานหรือ Effective Value เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Root Mean Square (RMS) เนื่องจากว่าค่าของมันเป็นผลมาจากการหารค่าสูงสุดกับรากที่ 2 เราอาจเขียนเป็น E_{rms} แต่ที่นิยมเขียน แรงดัน RMS นี้ในรูป E เท่านั้น

<u>ความเร็วเชิงมุม</u> (Angular Velocity หรือ ω (โอเมก้า)) หมายถึง จำนวนมุม (ในหน่วย เรเดียน) ที่รัศมีของวงกลมหมุนผ่านไปต่อ 1 วินาที ดังสมการ 3-11

$$\text{ความเร็วเชิงมุม } (\omega) = \frac{\text{จำนวนมุมทีวัด(เรเดียน)}}{\text{เวลา(นาที)}} \qquad \text{------------------- (3-9)}$$

หรือ

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \text{-------------------------------------- (3-10)}$$

ความเร็วเชิงมุมสำหรับรูปคลื่นไซน์ 1 รอบ จะได้จำนวนมุม θ เท่ากับ 2π เรเดียน ดังนั้น

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

แต่ $t = 1/f$ ดังนั้น

$\omega = 2\pi f$ เรเดียน / วินาที (Rad / Sec) ------------------- (3-11)

ถ้ากำหนดให้ $\theta = \omega . t$

และ $\omega = 2\pi .f.t$

ω = ความเร็วเชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียน (radian)

f = ความถี่ของไฟฟ้ากระแสสลับมีหน่วยเป็นไซเกิลต่อวินาที (Hertz,Hz)

t = เวลามีหน่วยเป็นวินาที (second)

<u>ตัวอย่างที่3-2</u> กำหนดให้สมการชั่วขณะของแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับ e = 300 sin314t V

จงคำนวณหาค่า ก. ความถี่ไฟฟ้ากระสลับ

ข. ค่าแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะที่เวลา t = 0.001 วินาที

<u>วิธีทำ</u> ก) จากสูตร $\omega = 2\pi .f.t$

เมื่อ ω = 314 t

$$\therefore f = \frac{314}{2\pi} = 50\ Hz$$

ข) จากสมการ e = 300 sin314t V

แทนค่าเวลา t = 0.001 sec. จะได้

e = 300 sin(314x0.001) V

e = 300 x0.3088 V

e = 92.64 V

<u>ตัวอย่าง 3- 4</u> คลื่นรูปไซน์ความถี่ 200 Hz จงหาความเร็วเชิงมุม

<u>วิธีทำ</u> ω = $2\pi f$

= 2 (3.14)(200)

= 1256 Rad / Sec ***<u>ตอบ</u>***

1 เรเดียน	=	57.3°
1 องศา	=	0.01746 เรเดียน

เมื่อเราทราบค่า ω หรือทราบค่าความถี่ของแรงดันไฟฟ้าสลับ เราสามารถคำนวณหาแรงดันและกระแสไฟฟ้าชั่วขณะในช่วงเวลาใดๆ ก็ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$e = Em \ Sin\ (\omega t) = Em\ Sin\ (2\pi ft)$$
$$i = Im \ Sin\ (\omega t) = Im\ Sin\ (2\pi ft)$$
-------------------------- (3-12)

<u>ตัวอย่าง 3-5</u> กระแสไฟฟ้าสลับรูปไซน์ มีค่ากระแสสูงสุด *100 A* มีความถี่ *50 Hz*

จงหา ก. เขียนสมการทั่วไปของกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ

ข. ค่ากระแสไฟฟ้าชั่วขณะเมื่อเวลาผ่านไป 1 / 360 วินาที

ค. ค่าเวลาที่ทำให้เกิดค่ากระแสชั่วขณะ *86 A*

<u>วิธีทำ</u> ก. สมการทั่วไปคือ $i = Im\ \ Sin\ (\omega t)$

$= 100\ Sin\ (2\pi t \times 50\ Hz)$

$= 100\ Sin\ (100\pi t)$

ข. ค่ากระแสชั่วขณะ $i = 100\ Sin\ (100 \times \pi \times 1/360)$

$= 100\ Sin\ (0.8726\ Rad)$

$i = 76.6\ \ A$

ค. หาค่า t เมื่อ $i = 86\ A$

แทนค่าในสมการ $i = 100\ Sin\ (100\pi t)$

$86\ A = 100\ Sin\ (100 \times 180^{\circ})\ t$

$86 / 100 = Sin\ (18000)\ t$

แต่ $0.86 = Sin\ 59.3^{\circ}$

$\therefore\ Sin\ (18000)\ t = Sin\ 59.3^{\circ}$

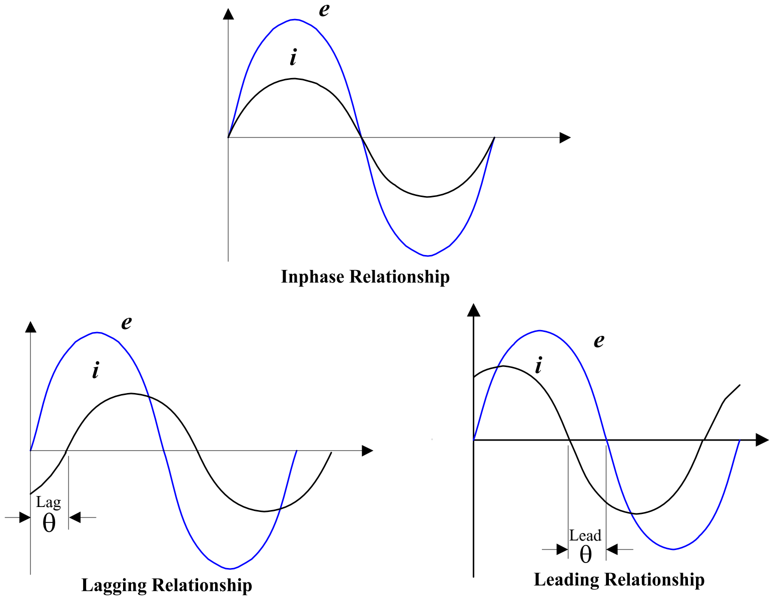
$(18000)\ t = 59.3^{\circ}$

$$t = \frac{59.3}{18000}$$

$= 3.29\ \ mS$ **<u>ตอบ</u>**

<u>เฟสและเฟสเซอร์</u>

เฟส (Phase) คือ ความแตกต่างระหว่างจุด 2 จุดในแกนเวลาของกราฟแสดงสัญญาณแรงดันหรือกระแส ซึ่งจำนวนของความแตกต่างบนแกนเวลานี้นับเป็นองศา

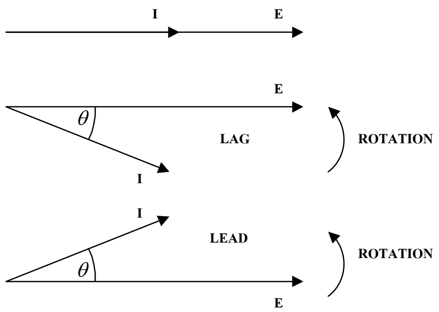


รูป 3-7 (ก) แสดงการ In-Phase กันของกระแสและแรงดัน

(ข) แสดงการล้าหลังของกระแสเป็นมุม θ

(ค) แสดงการนำหน้าของกระแสเป็นมุม θ

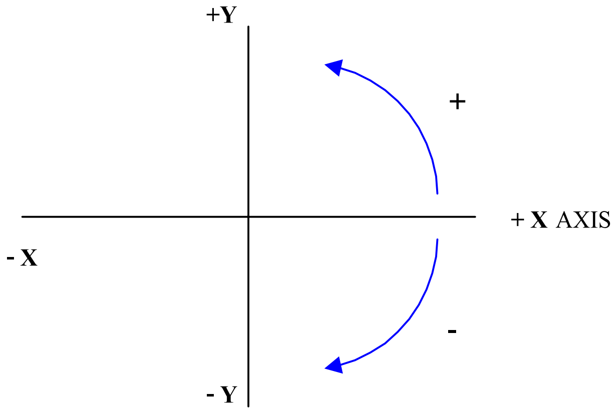
เฟสเซอร์ *(Phasers)* เป็นเวคเตอร์ที่ใช้เขียนขนาดและทิศทางซึ่งแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของมุมต่างเฟสระหว่างกระแสและแรงดัน โดยเขียนเฟสเซอร์อ้างอิงเป็นเฟสเซอร์ของแรงดัน e ให้มีขนาดเท่ากับ E โดยอยู่ในแกนมุม $\theta = 0°$ จากรูป 3-10 (ก) เป็นการ *In-Phase* ของกระแสและแรงดัน คือ ทั้ง e และ i เริ่มพร้อมกันที่มุม $\theta = 0°$เขียนเป็นเฟสเซอร์ได้ดังรูป 3-11 (ก)



รูป 3-8 (ก) เฟสเซอร์ของรูป 3-8 (ก) เมื่อ i และ e In-phase กัน

(ข) เฟสเซอร์ของรูป 3-8 (ข) เมื่อ i ล้าหลัง e เป็นมุม θ

(ค) เฟสเซอร์ของรูป 3-8 (ค) เมื่อ i นำหน้า e เป็นมุม θ



รูป 3-9 แสดงแกนอ้างอิงและการกำหนดค่ามุมนำหน้าและล้าหลัง

3.4 จำนวนเชิงซ้อน *(Complex Number)*

3.4.1 เลขจำนวนจริง *(Real Number)*

เลขจำนวนจริง คือ จำนวนเลขที่เราสามารถทราบค่าได้ว่ามีมากหรือน้อยเพียงใด เลขจำนวนจริงนั้นมี 2 ชนิด คือ จำนวนตรรกยะ (Rational Number) และ จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)

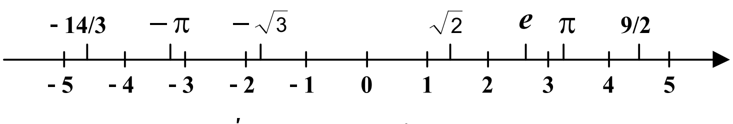
1. จำนวนตรรกยะ คือ เลขที่อยู่ในรูปของเลขจำนวนเต็ม เศษส่วน หรือ เลขทศนิยม ที่หาค่าได้ถูกต้องแน่นอน เช่น -2 -1 0 1 2 9/2 -14/3 0.2 เป็นต้น

2. จำนวนอตรรกยะ คือ เลขจำนวนที่ไม่สามารถหาค่าได้ถูกต้องแน่นอน เช่น

10/3 = 3.33333... $\sqrt{2}$ = 1.4142136......

π = 3.1415926...... e = 2.71828.........

จะเห็นได้ว่าทั้งเลขจำนวนตรรกยะและอตรรกยะนั้นต่างเป็นเลขจำนวนจริง คือ มีค่าและสามารถหาค่าได้ ต่างกันแต่ค่าของมันจะแน่นอนหรือไม่เท่านั้น เราสามารถกำหนดค่าของเลขจำนวนจริงต่างๆ ลงบนแกนเส้นตรงได้ เราเรียกเส้นตรงนี้ว่า “***เส้นจำนวนจริง*** ” *(Real Number Line)* ดังรูปที่ 3-13

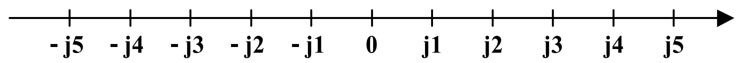


รูปที่ 3-10 แสดงเส้นจำนวนจริง

3.4.2 จำนวนจินตภาพ *(Imaginary Number)*

ค่ารากที่สองของเลขจำนวนจริงที่เป็นบวก เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{64}$ สามารถหาค่าได้และค่าที่ได้ก็กำหนดลงในเส้นจำนวนจริงได้ แต่มีเลขอีกจำนวนหนึ่ง ซึ่งมีค่าเป็นลบและเราไม่สามารถหาค่ารากที่สองของจำนวนลบได้ เช่น $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-16}$ เมื่อหาค่าไม่ได้ก็ไม่นับเป็นเลขจำนวนจริง นักคณิตศาสตร์ได้จัดระบบของเลขดังกล่าวเสียใหม่เรียกว่า “***จำนวนจินตภาพ***” และกำหนดให้ค่ารากที่สอง

ของเลขจำนวนจริงที่มีค่าเป็นลบเหล่านี้เขียนลงในแกนจินตภาพ หรือ เส้นจำนวนจินตภาพ (Imaginary Number Line) ได้ดังรูปที่ 3-14



รูปที่ 3-11 แสดงเส้นจำนวนจินตภาพ

และจึงมีการกำหนดให้ j เป็นหน่วยจินตภาพ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$ ทำให้สามารถเขียนรากที่สองของจำนวนจริงที่มีค่าเป็นลบค่าใดๆ ได้

เมื่อ $j = \sqrt{-1}$ และ $j^2 = -1$

ดังนั้น $\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \times 4 = j\sqrt{4} = j2$

$-\sqrt{-6} = -\sqrt{-1 \times 6} = -j\sqrt{6}$

และหาค่าของ $j^3 = j^2 \times j = j$

$j^4 = j^2 \times j^2 = -1 \times -1 = 1$

$j^5 = j^4 \times j = 1 \times j = j$

สรุป เลขที่เขียนด้วยจำนวนจินตภาพ (j) และจำนวนอื่นๆ ที่อยู่ในรูปของ j เช่น $j4$, $j5$, $-j\frac{3}{4}$ เราเรียกว่า จำนวนจินตภาพ

ตัวอย่าง 3-6 จงหาค่าของ $\sqrt{-32}$, j^8 j^{32}

วิธีทำ

$\sqrt{-32} = \sqrt{-1} \times 16 \times 2 = j\,4\sqrt{-2}$

$j^8 = j^4 \times j^4 = 1 \times 1 = 1$

$j^{32} = j^4 \times j^4 \times j^4 \times j^4 \times j^4 \times j^4 \times j^4 \times j^4$

$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ **ตอบ**

สำหรับ j ที่ยกกำลังค่ามากๆ เช่น j^n มีวิธีหาค่าง่ายๆ โดยการนำเอา 4 หาร n ได้เศษเท่าไร (ซึ่งไม่เกิน 3) แล้วจึงมาแปรเป็นค่า j เช่น

$j^{134} = ?$

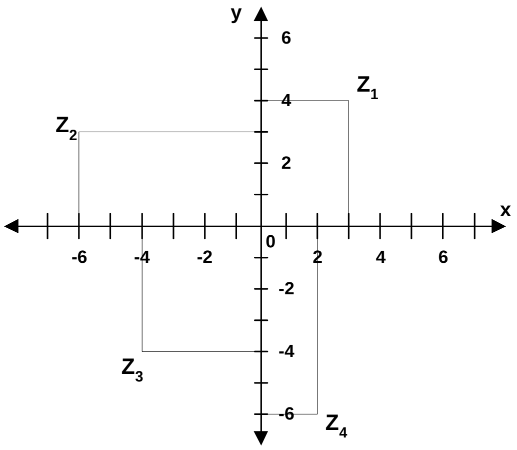
$n = 134$

$\frac{n}{4} = 33$ *เศษ 2*

นั่นคือ $j^{134} = j^2 = -1$ เป็นต้น

3.4.3 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

เลขของจำนวนใดๆ ที่เขียนให้อยู่ในรูปของ $x + jy$ เมื่อ x และ y เป็นเลขจำนวนจริงใดๆ โดยเรียกส่วนของ x ว่าส่วนจริง *(Real Part)* และ y ว่าส่วนจินตภาพ *(Imaginary Part)* และเรียกตัว j ว่า หน่วยจินตภาพ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$ เลขจำนวนดังกล่าวนี้เรียกว่าจำนวนเชิงซ้อน เมื่อกำหนดให้แกนจริง *(Real axis)* ตั้งฉากกับแกนจินตภาพ *(Imaginary axis)* เราสามารถกำหนด จำนวนเชิงซ้อนลงในพื้นที่ระหว่าง 2 แกน *(Complex Plane)* ได้ดังรูป 3-15



$Z_1 = 3 + j4$

$Z_2 = -6 + j3$

$Z_3 = -4 - j4$

$Z_4 = 2 - j6$

รูปที่ 3-11 แสดงค่าของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดลงใน Complex Plane ในรูปของ Rectangular Form

1. จำนวนเชิงซ้อนรูปแกนมุมฉาก (Rectangular Form)

จำนวนเชิงซ้อนรูปแกนมุมฉาก คือรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนได้ดังนี้

$$Z = x + jy \quad \text{-------------------------------------} \quad (3\text{-}13)$$

เมื่อนำไป *Plot* ลงใน *Complex Plane* ตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนจะบอกได้โดยขนาดของด้านทั้ง 2 ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือขนาดของส่วนจริงและส่วนจินตภาพ เช่น

$Z_1 = 6 + j0 = 6$ คือ ส่วนจริง (x) มีค่า = +6

และส่วนจินตภาพ(jy) มีค่า = 0

$Z_2 = 2 - j3$ คือ x = +2 และ jy = -3

$Z_3 = j4$ คือ x = 0 และ jy = +4

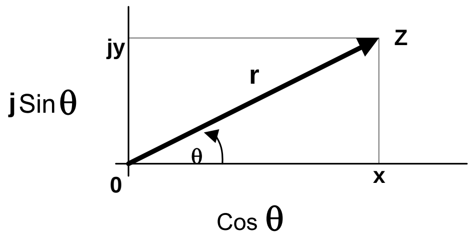
$Z_4 = -3 + j2$ คือ x = -3 และ jy = +2

$Z_5 = -4 - j4$ คือ x = -4 และ jy = -4

$Z_6 = 3 + j3$ คือ x = +3 และ jy = +3

2. จำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว (Polar Form)

จำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว เขียนได้ในรูปของ $Z = r\angle\theta$ โดยค่าของ r เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ Z และมุม θ คือ ขนาด (Amplitude) ของ Z ดังรูป 3-16



รูปที่ 3-12 แสดงจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จากรูปค่าของ $x = r\ \mathrm{Cos}\,\theta$

$y = r\ Sin\ \theta$

เมื่อ $Z = x + jy$

ดังนั้น $Z = r\ \mathrm{Cos}\,\theta + j\, r\, \mathrm{Sin}\,\theta$

$Z = r\,(Cos\ \theta + j\ Sin\ \theta)$

หาค่าของ r ได้จาก $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

หาค่าของ θ ได้จาก $\theta = \arctan\left(y/x\right) = \tan^{-1}\left(y/x\right)$

เราจึงเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้ว่า

$$Z = r\angle\theta \qquad \text{-------------------------------------} \ (3\text{-}14)$$

3. จำนวนเชิงซ้อนรูปตรีโกณมิติ และ จำนวนเชิงซ้อนรูปเอ็กซ์โปเนนเชียล

(Trigonometric Form and Exponential Form)

จำนวนเชิงซ้อนรูปตรีโกณมิติ คือ รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนได้ดังนี้

$$Z = r\,(Cos\ \theta + j\ Sin\ \theta) \qquad \text{-------------------} \ (3\text{-}15)$$

และถ้าพิสูจน์โดยใช้ *Euler ‘s Formular* ได้ว่า $e^{j\theta} = (Cos\ \theta + j\ Sin\ \theta)$

หรือเขียนรูปจำนวนเชิงซ้อนใหม่

$$Z = r\, e^{j\theta} \qquad \text{-------------------------------------} \ (3\text{-}16)$$

ซึ่งจำนวนเชิงซ้อนในรูปนี้เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนรูปเอ็กซ์โปเนนเชียล (โดยที่ θ มีหน่วยเป็น เรเดียน)

<u>สรุป</u> รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนมี 4 แบบคือ

1. จำนวนเชิงซ้อนรูปแกนมุมฉาก $Z = x + jy$
3. จำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว $Z = r\angle\theta$
3. จำนวนเชิงซ้อนรูปตรีโกณมิติ $Z = r\,(Cos\ \theta + j\ Sin\ \theta)$
4. จำนวนเชิงซ้อนรูปเอ็กซ์โปเนนเชียล $Z = r\, e^{j\theta}$

<u>ตัวอย่าง 3-7</u>จงแปลงจำนวนเชิงซ้อน $3+j3$ ให้อยู่ในรูปของเชิงขั้ว , รูปตรีโกณมิติ และ รูปเอ็กซ์โปเนนเชียล

<u>วิธีทำ</u> $Z = x + jy$

$= 3 + j3$

จาก $Z = r\angle\theta$

แต่ $r = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{3^2+3^2}$

$= \sqrt{18} = \sqrt{3\times3\times2}$

$\therefore \quad r = 3\sqrt{2}$

และ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{3} = 45^{\circ}$

1. รูปเชิงขั้ว $Z = 3\sqrt{2}\angle 45^{\circ}$ **<u>ตอบ</u>**

จาก $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

2. รูปตรีโกณมิติ $Z = 3\sqrt{2}(\cos 45^{\circ} + j\sin 45^{\circ})$ **<u>ตอบ</u>**

จาก $Z = r\,e^{j\theta}$

$= 3\sqrt{2}\,e^{j(45\times\pi/180)}$

3. รูปเอ็กซ์โปเนนเชียล $Z = 3\sqrt{2}\,e^{j0.7854}$ **<u>ตอบ</u>**

3.4.4 การบวกและลบเลขจำนวนเชิงซ้อน

การบวกและลบเลขจำนวนเชิงซ้อน จะต้องจัดให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก $(Z=x+jy)$ ทำได้โดยการบวกหรือลบส่วนจริงกับส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับส่วนจินตภาพดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง 3-12</u> จงทำให้เป็นผลสำเร็จ 1. $(3 - j3) + (3 + j4)$

2. $(1 + j6) - (-3 + j5)$

วิธีทำ 1. $(2 - j3) + (3 + j4) = (2+3) + j(-3+4)$

$= 5 + j$ **<u>ตอบ</u>**

2. $(1 + j6) - (-3 + j5) = (1-(-3)) + j(6-5)$

$= 4 + j$ **<u>ตอบ</u>**

<u>ตัวอย่าง 3-8</u> จงบวกจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ $2\angle 30^{\circ} + 4\angle 60^{\circ}$

วิธีทำ แปลงให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก

$2\angle 30^{\circ} = 2(\cos 30^{\circ} + j\sin 30^{\circ})$

$= 2(0.866 + j\,0.5)$

$= 1.732 + j$

และ $4\angle 60^{\circ} = 4(\cos 60^{\circ} + j\sin 60^{\circ})$

$$= 4\,(0.5 + j\,0.866)$$
$$= 2 + j\,3.464$$

ดังนั้น $2\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ = (1.732 + j) + (2 + j\,3.464)$

$$= (1.732 + 2) + j\,(1 + 3.464)$$
$$= 3.732 + j\,4.464$$ **ตอบ**

3.4.5 การ Conjugate จำนวนเชิงซ้อน

Conjugate ของจำนวนเชิงซ้อน คือ การเปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนจินตภาพ ส่วนเครื่องหมายของส่วนจริงยังคงเดิม เช่น จำนวนเชิงซ้อน $3+j5$ Conjugate ของจำนวนเชิงซ้อน คือ $3-j5$ หรือ Conjugate ของ $-2-j7$ คือ $-2+j7$ เป็นต้น ถ้า $Z = x+jy$ *Conjugate* ของ Z เขียนแทนด้วย Z* (แซดสตาร์) คือ $Z^* = x - jy$

$$Z = x + jy \quad ; \quad Z^* = x - jy$$
$$Z = -5 - j4 \quad ; \quad Z^* = -5 + j4$$
$$Z = 3 + j2 \quad ; \quad Z^* = 3 - j2$$

ตัวอย่าง 3-9 ถ้า $Z = 3 - j4$ จงหาค่าของ Z^* และ $Z \cdot Z^*$

วิธีทำ

$$Z^* = 3 + j4$$
$$Z \cdot Z^* = (3 - j4)(3 + j4)$$
$$= 9 + j12 - j12 - j^2 16$$
$$= 9 + 16$$
$$= 25$$ **ตอบ**

จะเห็นว่าเมื่อนำจำนวนเชิงซ้อนและค่า Conjugate ของตัวมันเองคูณกันแล้วผลที่ได้รับจะเหลือค่าจริงเพียงค่าเดียว สำหรับในรูปแบบเชิงซ้อนอื่นๆ เขียนได้ดังนี้

ในรูปเชิงขั้ว $Z = r\angle\theta \quad ; \quad Z^* = r\angle -\theta$

ในรูปตรีโกณมิติ $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta) \; ; \; Z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$

ในรูปเอ็กซ์โปเนนเชียล $Z = r\,e^{j\theta} \quad ; \quad Z^* = r\,e^{-j\theta}$

3.4.6 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน Z_1 และ Z_2 อยู่ในรูปของเชิงขั้วหรือเอ็กซ์โปเนนเชียลสามารถคูณกันได้ โดยการนำเอาค่า r มาคูณกันแล้วนำเอามุม θ มาบวกกัน คือ

$$Z_1 = r_1 \angle\theta_1 \quad , \quad Z_2 = r_2 \angle\theta_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \angle\theta_1 \times r_2 \angle\theta_2$$

$$= r_1 \cdot r_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$$ หน่วยของ θ เป็นองศา

และ
$$Z_1 = r_1 e^{j\theta_1} \quad , \quad Z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \times r_2 e^{j\theta_2}$$

$$= r_1 \cdot r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$ หน่วยของ θ เป็นเรเดียน

ถ้าเป็นรูปแกนมุมฉาก การคูณทำได้โดยวิธีการคูณแบบพีชคณิต ดังนี้

ถ้า
$$Z_1 = x_1 + jy_1 \quad , \quad Z_2 = x_2 + jy_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)$$

$$= x_1 x_2 + j x_1 y_2 + j y_1 x_2 + j^2 y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 + j x_1 y_2 + j y_1 x_2 - y_1 y_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

<u>ตัวอย่าง 3-10</u> กำหนดให้ $Z_1 = 3 \angle 30^\circ$, $Z_2 = 5 \angle 45^\circ$ จงหา $Z_1 \cdot Z_2$

<u>วิธีทำ</u>
$$Z_1 \cdot Z_2 = (3x5) \angle(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= 15 \angle 75^\circ$$ **<u>ตอบ</u>**

<u>ตัวอย่าง 3-11</u> กำหนดให้ $Z_1 = 3 e^{j\pi/3}$, $Z_2 = 5 e^{-j\pi/6}$ จงหา $Z_1 \cdot Z_2$

<u>วิธีทำ</u>
$$Z_1 \cdot Z_2 = (3x5) e^{j(\pi/3 - \pi/6)}$$

$$= 15 e^{j\pi/6}$$ **<u>ตอบ</u>**

<u>ตัวอย่าง 3-12</u> $Z_1 = 2 + j3$ และ $Z_2 = -1 - j3$ จงหา $Z_1 \cdot Z_2$

วิธีทำ
$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 + j3)(-1 - j3)$$

$$= -2 - j6 - j3 + j^2 9$$

$$= -2 - j9 + 9$$

$$= 7 - j9$$ **<u>ตอบ</u>**

3.4.7 การหารจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วและรูปเอ็กซ์โปเนนเชียล 2 จำนวนทำการหารกันได้โดยให้นำค่า r มาหารกัน และนำมุม θ ของตัวตั้งลบกับมุม θ ของตัวหาร ดังนี้

ถ้า $Z_1 = r_1 \angle\theta_1$, $Z_2 = r_2 \angle\theta_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

และถ้า $Z_1 = r_1\, e^{j\theta_1}$, $Z_2 = r_2\, e^{j\theta_2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

แต่ในกรณีของเชิงซ้อนในรูปแกนมุมฉากแล้ว ถ้าจะทำการหารกันทำได้โดยการนำเอาค่า *Conjugate* ของตัวส่วนคูณทั้งเศษและส่วน ดังนี้

ถ้า $Z_1 = x_1 + jy_1$, $Z_2 = x_2 + jy_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 - jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2}{x^2 - jx_2y_2 + jx_2y_2 - jy_2^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 - jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1x_2 - jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

<u>ตัวอย่าง 3-13</u> ถ้า $Z_1 = 4 - j5$ และ $Z_2 = 2 + j2$ จงหา Z_1 / Z_2

วิธีทำ

$$\frac{Z1}{Z2} = \frac{4 - j5}{2 + j2}$$

$$= \frac{(4 - j5)(2 - j2)}{(2 + j2)(2 - j2)}$$

$$= \frac{8 - j8 - j10 + j^2 10}{4 + j4 - j4 - j^2 4}$$

$$= \frac{8 - j18 - 10}{8}$$

$$= \frac{-2 - j18}{8}$$

$$= \frac{-2}{8} - \frac{-j18}{8}$$

$$= -0.25 - j2.25$$

<u>ตอบ</u>